Mr BRANISLAV STOJANOVIĆ
docent Tehnološkog fakulteta u Tuzli

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE

JEDNAČINE I NEJEDNAČINE SA APSOLUTNIM VRIJEDNOSTIMA
MATEMATIČKA INDUKCIJA
BINOMNI OBRAZAC
KOMPLEKSNI BROJEVI
DETERMINANTE I SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA
MATRICE
VEKTORSKA ALGEBRA
ANALITIČKA GEOMETRIJA U PROSTORU

Treće izdanje

»SVJETLOST«, OOUR ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA,
SARAJEVO, 1987.

Odgovorni urednik: *Ramiz Džananović*

Recenzenti: *dr Mahmut Bajraktarević*, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu

dr Mihailo Galić, redovni profesor Saobraćajnog fakulteta u Sarajevu

Lektor: *Radmila Paleksić*

Naslovna strana: *Ivica Čavar*

Crteži: *Arnaut Njegoš*

Tehnički urednik: *Vladimira Dizdarević*

Korektor: *Branislava Varičak*

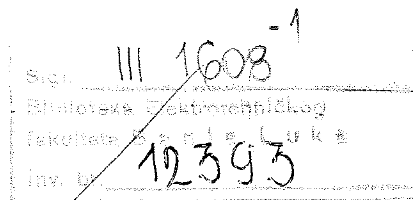
Tiraž: 2 000 primjeraka

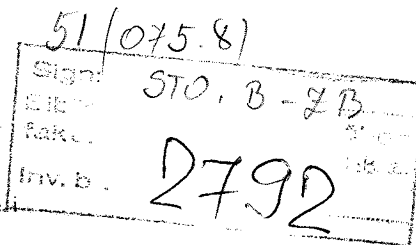
Izdaje: »Svjetlost«, OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo

Za izdavača: *Abduselam Rustempašić*

Štampa: »Svjetlost«, OOUR Štamparija Trebinje

Izdavanje ovog djela finansijski je pomogao Tehnološki fakultet u Tuzli





Narodna i univerzitetska biblioteka BiH, Sarajevo
Katalogizacija u publikaciji (CIP)

51 (075.8) (076.2)

STOJANOVIĆ, Branislav

Zbirka zadataka iz matematike / Branislav Stojanović; crteži Arnaut Njegoš. — 3. izd. — Sarajevo : Svjetlost, 1987. — 463 str. : crteži; 24 cm

1. izd. 1981. — Bibliografija: str. 464.

ISBN 86-01-00783-X

ISBN 86-01-00783-x

PREDGOVOR

Ova zbirka napisana je prema programu matematike za tehničke fakultete i više škole sadržanom u Samoupravnom sporazumu o zajedničkim programskim osnovama i potpisanom 1979. godine između Republičke zajednice za visoko obrazovanje SRBiH i svih tehničkih fakulteta i viših tehničkih škola u SRBiH na kojima se izučava matematika kao nastavna disciplina.

Za razliku od većine sličnih udžbenika, u ovome je, pored kraćih teoretskih uputstava uz svako poglavlje, većina postavljenih problema i zadataka riješena detaljno.

To je učinjeno iz sljedećih razloga:

- *Veliki broj studenata se školuje uz rad i nije u mogucnosti da kontinuirano prati predavanja i vježbe, pa im to pričinjava velike teškoće prilikom priprema za polaganje ispita.*
- *U nekim školama usmjerenog obrazovanja matematika je zastupljena malim brojem časova, na primjer u medicinskim, ekonomsko-upravnim školama i školama za radnička zanimanja, a zakon ih je izjednačio pri upisu na sve fakultete, pa i na tehničke.*

Svjestan sam da ovakva zbirka ima i svoju lošu stranu, ali ona je zanemarljiva u odnosu na prednosti koje pruža čitaocu. Loša strana se može lako odstraniti ukoliko čitalac pri izradi zadataka ne gleda njihovo rješenje, već pokuša da ih sam riješi, a dobijeno rješenje i postupak u radu, na kraju, uporedi sa rješenjem i postupkom u Zbirci. Na ovaj način čitalac će postepeno ovladati tehnikom rješavanja zadataka i naučiti predviđeno gradivo. Na kraju svakog poglavlja dat je i veliki broj neurađenih zadataka sa rješenjem, čijom će izradom čitalac sam sebe provjeriti koliko je usvojio prethodni sadržaj.

Iz sadržaja Zbirke se vidi da je obrađena ona materija više matematike koja je prirodni nastavak gradiva matematike srednjeg usmjerenog obrazovanja, pa se zato ovom zbirkom mogu korisno poslužiti i učenici starijih razreda srednjih škola.

Dio zadataka u Zbirci je originalan, što je čini zanimljivom, dok su ostali zadaci posuđeni iz literature date u popisu na kraju knjige.

Tekst Zbirke recenzirali su akademik dr Mahmut Bajraktarević, profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu i dr Mihailo Galić, profesor Saobraćajnog fakulteta u Sarajevu. Svojim primjedbama i savjetima doprinijeli su da tekst knjige bude jasniji i tačniji. Na tome im se najsrdačnije zahvaljujem.

Pisac

U izdanju Zavoda su objavljeni sljedeći univerzitetski udžbenici i zbirke zadataka:

dr Veselin Perić:	Algebra I: prsteni i moduli, linearna algebra
dr Veselin Perić:	Algebra II: opšte algebarske strukture, teorija polja, algebarske jednačine
dr Miloš Tomić:	Matematika-diferencijalne jednačine, integrali, funkcije kompleksne promjenljive
mr Muhamed Bračković:	Matematika-determinante, sistemi linearnih jednačina, elementi vektorske algebre i analitičke geometrije
mr Muhamed Bračković:	Matematika-diferencijalni račun funkcije jedne promjenljive
mr Muhamed Bračković:	Matematika-integrali račun funkcije jedne promjenljive, funkcije dviju promjenljivih
dr V. Perić, dr M. Tomić:	Zbirka riješenih zadataka iz matematike II, sveska I: diferencijalne jednačine
dr V. Perić, dr M. Tomić, P. Karačić:	Zbirka riješenih zadataka iz matematike II, sveska II: diferencijalna geometrija, višestruki, linijski i površinski integrali, vektorska analiza
dr V. Perić, dr M. Tomić, P. Karačić:	Zbirka riješenih zadataka iz matematike II, sveska III: funkcije kompleksne promjenljive, redovi, Laplasova transformacija
M. Kulišić:	Zbirka riješenih zadataka iz matematike I: neodređeni integral
Grupa autora:	Zbirka zadataka iz teorije funkcija kompleksne promjenljive
mr H. Fatkić, V. Dragičević:	Zbirka zadataka — diferencijalni račun funkcija dvije i više promjenljivih
V. Dragičević, mr H. Fatkić:	Zbirka zadataka — određeni i višestruki integrali
dr Miloš Tomić:	Diferencijalne jednačine

SADRŽAJ

1. JEDNAČINE I NEJEDNAČINE SA APSOLUTNIM VRIJEDNOSTIMA

1.1. Apsolutna vrijednost realnog broja

Apsolutna vrijednost (modul) realnog broja a, u oznaci $|a|$, definiše se na sljedeći način:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{za } a>0 \\ 0, & \text{za } a=0 \\ -a, & \text{za } a<0. \end{cases} \qquad (1)$$

Primjer 1.

a) $|8|=8$, b) $|-8|=-(-8)=8$,

c) $\left|-\frac{1}{2}\right|=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Za apsolutne vrijednosti realnih brojeva vrijede sljedeći stavovi:

1. Ako su a i x realni brojevi onda vrijedi:

a) $|x|<a$, ako i samo ako je $(-a<x<a)$

b) $|x|>a$, $(a\geqslant 0)$ ako i samo ako je ($x<-a$ ili $x>a$).

Primjer 2.

$$|3-2x|<1$$

$$-1<3-2x<1$$

$$-4<-2x<-2 /:(-2)$$

$$2>x>1$$

$$1<x<2.$$

2. Ako su a i b realni brojevi, tada je:

a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

c) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ d) $|a-b| \leqslant |a| + |b|$

e) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b|$ f) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|$

g) $|a^n| = |a|^n$, $(n \in \mathbf{N})$ h) $|a-b| = |b-a|$.

3. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, tada je:

a) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

b) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \geqslant |a_1| - |a_2| - \cdots - |a_n|$.

1.2. Jednačine sa apsolutnim vrijednostima

1.

Riješiti jednačinu $|x+3| = |x|$.

Rješenje. Pošto su nule izraza pod znakom apsolutne vrijednosti $x=-3$ i $x=0$, to datu jednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty, -3]$, $(-3, 0]$ i $(0, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $x \in (-\infty, -3]$ izraz $x+3$ je nepozitivan, tj. $x+3 \leq$, a x je negativan, tj. $x<0$, pa je:

$$-(x+3) = -x$$
$$-3 = 0.$$

Pošto dobijeni rezultat nema smisla, to data jednačina u promatranom podintervalu $(-\infty, -3]$ nema rješenje.

2) Za $x \in (-3, 0]$ je $x+3>0$, a $x \leq 0$, pa je:

$$x+3 = -x$$
$$x = -\frac{3}{2}.$$

Dobijeno rješenje zadovoljava datu jednačinu jer je $x = -\frac{3}{2} \in (-3, 0]$.

3) Za $x \in (0, \infty)$ oba su izraza pod znakom apsolutne vrijednosti pozitivni, tj. $x+3>0$ i $x>0$, pa je:

$$x+3 = x$$
$$3 = 0.$$

Pošto dobijeni rezultat nema smisla, to data jednačina u promatranom intervalu $(0, \infty)$ nema rješenje.

Prema tome, data jednačina ima jedno jedino rješenje $x = -\frac{3}{2}$.

2.

Riješiti jednačinu $|x-1| - |x+2| = 1$.

Rješenje. Pošto su nule izraza pod znakom apsolutne vrijednosti $x=1$ i $x=-2$, to datu jednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty, -2]$, $(-2, 1]$ i $(1, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $x \in (-\infty, -2]$ su $x-1<0$ i $x+2 \leqslant 0$, pa je:

$$-(x-1) + (x+2) = 1$$
$$3 = 1.$$

Prema tome, u promatranom intervalu $(-\infty, -2]$ data jednačina nema rješenjâ.

2) Za $x \in (-2, 1]$ su $x-1 \leqslant 0$ i $x+2>0$, pa je:

$$-(x-1) - (x+2) = 1$$
$$x = -1.$$

Dobijeno rješenje zadovoljava datu jednačinu jer je $x = -1 \in (-2, 1]$.

3) Za $x \in (1, \infty)$ su $x-1>0$ i $x+2>0$, pa je:

$$(x-1) - (x+2) = 1$$
$$-3 = 1.$$

Prema tome, u promatranom intervalu $(1, \infty)$ data jednačina nema rješenjâ. Dakle, jedino rješenje date jednačine je $x = -1$.

3.

Riješiti jednačinu $|x+1| - |2x-3| = 2$.

Rješenje. Pošto su nule izraza pod znakom apsolutne vrijednosti $x=-1$ i $x=\frac{3}{2}$, to datu jednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty, -1]$, $\left(-1, \frac{3}{2}\right]$ i $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $x \in (-\infty, -1]$ su $x+1 \leqslant 0$ i $2x-3<0$, pa je:

$$-(x+1) + (2x-3) = 2$$
$$x = 6.$$

Dobijeno rješenje ne zadovoljava datu jednačinu jer $x=6\notin(-\infty, -1]$.

2) Za $x\in\left(-1, \frac{3}{2}\right]$ su $x+1>0$ i $2x-3\leqslant 0$, pa je:

$$(x+1)+(2x+3)=2$$

$$x=-\frac{2}{3}.$$

Dobijeno rješenje zadovoljava datu jednačinu jer je $x=-\frac{2}{2}\in\left(-1, \frac{3}{2}\right]$.

3) Za $x\in\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ su $x+1>0$ i $2x-3>0$, pa je:

$$(x+1)-(2x-3)=2$$

$$x=2.$$

Ovo rješenje takođe zadovoljava datu jednačinu jer je $x=2\in\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Dakle, rješenja date jednačine su $x_1=-\frac{2}{3}$ i $x_2=2$.

4.

Riješiti jednačinu $\frac{|x-2|}{4}-(x-2)=\frac{|x-2|}{3}+1$.

Rješenje. Oslobodimo li se razlomka dobićemo:

$$3|x-2|-12(x-2)=4|x-2|+12$$

$$|x-2|+12x-12=0.$$

Dobijenu jednačinu promatrajmo u podintervalima $(-\infty, 2]$ i $(2, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $x\in(-\infty, 2]$ je $x-2<0$, pa je:

$$-(x-2)+12x-12=0$$

$x=\frac{10}{11}\in(-\infty, 2]$ je rješenje date jednačine.

2) Za $x\in(2, \infty)$ je $x-2>0$, pa je:

$$x-2+12x-12=0$$

$x=\frac{14}{13}\notin(2, \infty)$ nije rješenje date jednačine.

Prema tome, jedino rješenje date jednačine je samo $x=\frac{10}{11}$.

5.

Riješiti jednačinu $|y+1|-|y|=\frac{y}{2}$.

Rješenje. Datu jednačinu promatraćemo u podintervalima $(-\infty, -1]$, $(-1, 0]$ i $(0, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $y\in(-\infty, -1]$ je $y+1<0$ i $y<0$, pa je:

$$-(y+1)+y=\frac{y}{2}$$

$$y=-2\in(-\infty, -1].$$

2) Za $y\in(-1, 0]$ je $y+1>0$ i $y<0$, pa je:

$$y+1+y=\frac{y}{2}$$

$$y=-\frac{2}{3}\in(-1, 0].$$

3) Za $y\in(0, \infty)$ je $y+1>0$ i $y>0$, pa je:

$$y+1-y=\frac{y}{2}$$

$$y=2\in(0, \infty).$$

Dakle, jedina rješenja date jednačine su $y_1=-2$, $y_2=-\frac{2}{3}$ i $y_3=2$.

6.

Riješiti jednačinu $x^2=|2x+3|$.

Rješenje. Datu jednačinu promatraćemo u podintervalima $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ i $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $x\in\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ je $2x+3<0$, pa je:

$$x^2=-(2x+3)$$

$$x^2+2x+3=0.$$

Pošto dobijena jednačina nema realnih rješenja, to i data jednačina za $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ nema rješenje.

2) Za $x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ je $2x+3>0$, pa je:

$$x^2 = 2x+3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = 3 \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right) \text{ i } x_2 = -1 \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Prema tome, jedina rješenja date jednačine su $x_1 = 3$ i $x_2 = -1$.

7.

Riješiti jednačinu $0{,}7^{\frac{|2-x|}{x+1}} = \sqrt[3]{0{,}49}$.

Rješenje.

$$0{,}7^{\frac{|2-x|}{x+1}} = 0{,}7^{\frac{2}{3}}.$$

Na osnovu pravila o jednakosti dva stepena, imamo da je:

$$\frac{|2-x|}{x+1} = \frac{2}{3}, \qquad x \neq -1.$$

Dobijenu jednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty, 2]$ i $(2, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $x \in (-\infty, 2)$ je $2-x>0$, pa je:

$$\frac{2-x}{x+1} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{4}{5} \in (-\infty, 2].$$

2) Za $x \in (2, \infty)$ je $2-x<0$, pa je:

$$\frac{-(2-x)}{x+1} = \frac{2}{3}$$

$$x = 8 \in (2, \infty).$$

Dakle, jedina rješenja date jednačine su $x_1 = \frac{4}{5}$ i $x_2 = 8$.

8.

Riješiti jednačinu $|\cos z| = \cos z + 1$, $(0 < z < 2\pi)$.

Rješenje. Pošto je $\cos z = 0$, u zadatom intervalu $(0, 2\pi)$, za $z = \frac{\pi}{2}$ i $z = \frac{3\pi}{2}$, to datu jednačinu treba promatrati u podintervalima $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ i $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ intervala $(0, 2\pi)$.

1) Za $z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\cos z > 0$, pa je:

$$\cos z = \cos z + 1$$

$$0 = 1.$$

Pošto dobijeni rezultat nema smisla, to data jednačina u promatranom intervalu nema rješenje.

2) Za $z \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ je $\cos z < 0$, pa je:

$$-\cos z = \cos z + 1$$

$$\cos z = -\frac{1}{2}$$

$$z_1 = \frac{2\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{4\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

3) Za $z \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ je $\cos z > 0$, pa je:

$$\cos z = \cos z + 1$$

$$0 = 1.$$

Dakle, u promatranom intervalu data jednačina nema rješenje iz istog razloga kao pod 1).

Prema tome, jedina rješenja date jednačine su $z_1 = \frac{2\pi}{3}$ i $z_2 = \frac{4\pi}{3}$.

9.

Riješiti jednačinu $|y-1| + |y^2 + 3y - 4| = 5$.

Rješenje. Pošto su nule izraza pod znakom apsolutne vrijednosti $y=1$, $y=-4$, to datu jednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty, -4]$, $(-4, 1]$ i $(1, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $y\in(-\infty, -4]$ je $y-1\leqslant 0$ i $y^2+3y-4>0$, pa je:

$$-(y-1)+(y^2+3y-4)=5$$

$$y^2+2y-8=0$$

$$y_1=2\notin(-\infty, -4),\ y_2=-4\in(-\infty, -4).$$

2) Za $y\in(-4, 1)$ je $y-1<0$ i $y^2+3y-4<0$, pa je:

$$-(y-1)-(y^2+3y-4)=5$$

$$y^2+4y=0$$

$$y_3=0\in(-4, 1],\ y_4=-4\notin(-4, 1].$$

3) Za $y\in(1, \infty)$, je $y-1>0$ i $y^2+3y-4>0$, pa je:

$$y-1+y^2+3y-4=5$$

$$y^2+4y-10=0$$

$$y_5=-2+\sqrt{14}\approx 1{,}74\in(1, \infty),$$

$$y_6=-2-\sqrt{14}\approx -5{,}74\notin(1, \infty).$$

Prema tome, jedina rješenja date jednačine su $y=0$, $y=-4$ i $y=-2+\sqrt{14}$.

10.

Riješiti jednačinu $|x^2+x-2|+|x^2-x-2|=2$.

Rješenje. $x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x_3=2,\ x_4=-1.$$

Prema tome, datu jednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty, -2]$, $(-2, -1]$, $(-1, 1]$, $(1, 2]$ i $(2, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $x\in(-\infty, -2]$ je $x^2+x-2\geqslant 0$ i $x^2-x-2>0$, pa je:

$$x^2+x-2+x^2-x-2=2$$

$$2x^2-6=0$$

$$x^2-3=0$$

$$x_1=\sqrt{3}\notin(-\infty, -2],\quad x_2=-\sqrt{3}\notin(-\infty, -2].$$

2) Za $x\in(-2, -1]$ je $x^2+x-2<0$ i $x^2-x-2\geqslant 0$, pa je:

$$-(x^2+x-2)+(x^2-x-2)=2$$

$$x+1=0$$

$$x_3=-1\in(-2, -1].$$

3) Za $x\in(-1, 1]$ je $x^2+x-2\leqslant 0$ i $x^2-x-2<0$, pa je:

$$-(x^2+x-2)-(x^2-x-2)=2$$

$$x^2-1=0$$

$$x_4=1\in(-1, 1],\quad x_5=-1\notin(-1, 1].$$

4) Za $x\in(1, 2]$ je $x^2+x-2>0$ i $x^2-x-2\leqslant 0$, pa je:

$$x^2+x-2-(x^2-x-2)=2$$

$$2x=2$$

$$x_6=1\notin(1, 2].$$

5) Za $x\in(2, \infty)$ je $x^2+x-2>0$ i $x^2-x-2>0$, pa je:

$$x^2+x-2+x^2-x-2=2$$

$$x^2-3=0$$

$$x_{7,8}=\pm\sqrt{3}\notin(2, \infty).$$

Prema tome, jedina rješenja date jednačine su $x=1$ i $x=-1$.

11.

Riješiti jednačinu $\big|\,||1-x|\cdot 2-3|\cdot 4-5\,\big|=6$.

Rješenje. Datu jednačinu treba promatrati u dva sljedeća podintervala $(-\infty, 1]$ i $(1, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

1) Za $x\in(-\infty, 1]$ imamo da je $1-x\geqslant 0$, pa je:

$$||2-2x-3|\cdot 4-5|=6$$

$$||-1-2x|\cdot 4-5|=6 \ldots. \ (*)$$

Međutim, ovu jednačinu treba promatrati u podintervalima $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ i $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

a) Za $x\in\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ imamo da je $(-1-2x)\geqslant 0$, pa je iz (*):

$$|-4-8x-5|=6$$

$$|-8x-9|=6 \ \ldots.. \ (i).$$

Uzimajući u obzir 1) i a) dobijamo još dva nova podintervala $\left(-\infty, -\frac{9}{8}\right]$ i $\left(-\frac{9}{8}, -\frac{1}{2}\right)$.

I) Za $x \in \left(-\infty, -\frac{9}{8}\right]$ imamo da je $(-8x-9) \geqslant 0$, pa je iz (i):

$$-8x-9=6$$

$$x_1=-\frac{15}{8} \in \left(-\infty, -\frac{9}{8}\right].$$

II) Za $x \in \left(-\frac{9}{8}, -\frac{1}{2}\right]$ imamo da je $(-8x-9)<0$, pa je iz (i):

$$8x+9=6$$

$$x_2=-\frac{3}{8} \notin \left(-\frac{9}{8}, -\frac{1}{2}\right].$$

b) Za $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ imamo da je $(-1-2x)<0$, pa je iz (*):

$$|4+8x-5|=6$$

$$|8x-1|=6 \ \ldots . (\mathrm{j}).$$

Pošto je nula izraza pod znakom apsolutne vrijednosti $\frac{1}{8}$, to jednačinu (j) treba promatrati u podintervalima $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right]$ i $\left(\frac{1}{8}, 1\right]$ intervala $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

I) Za $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right]$ je $8x-1 \leqslant 0$, pa iz (j) dobijamo:

$$-8x+1=6$$

$$x_3=-\frac{5}{8} \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right].$$

II) Za $x \in \left(\frac{1}{8}, 1\right]$ je $8x-1>0$, pa je iz (j):

$$8x-1=6$$

$$x_4=\frac{7}{8} \in \left(\frac{1}{8}, 1\right].$$

2) Za $x \in (1, \infty)$ imamo da je $1-x<0$, pa iz date jednačine slijedi:

$$||-2+2x-3| \cdot 4-5|=6$$

$$||2x-5| \cdot 4-5|=6 \ \ldots\ldots (^{**}).$$

Kako je $x=\frac{5}{2}$ nula izraza pod znakom apsolutne vrijednosti, interval $(1, \infty)$ dijelimo na dva podintervala $\left(1, \frac{5}{2}\right]$ i $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$.

c) Za $x \in \left(1, \frac{5}{2}\right]$ imamo da je $2x-5<0$, pa iz (**) slijedi:

$$|-8x+20-5|=6$$

$$|15-8x|=6 \ \ldots\ldots (\mathrm{k}).$$

Nula izraza pod znakom apsolutne vrijednosti je $\frac{15}{8}$, pa interval $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ dijelimo na dva nova podintervala $\left(1, \frac{15}{8}\right]$ i $\left(\frac{15}{8}, \frac{5}{2}\right)$.

I) Za $x \in \left(1, \frac{15}{8}\right]$ imamo da je $15-8x \leqslant 0$, pa iz (k) slijedi:

$$15-8x=6$$

$$x_5=\frac{9}{8} \in \left(1, \frac{15}{8}\right].$$

II) Za $x \in \left(\frac{15}{8}, \frac{5}{2}\right)$ je $15-8x>0$ pa iz (k) slijedi:

$$-15+8x=6$$

$$x_6=\frac{21}{8} \notin \left(\frac{15}{8}, \frac{5}{2}\right).$$

d) Za $x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$ imamo da je $2x-5>0$, pa iz (**) slijedi:

$$|8x-20-5|=6$$

$$|8x-25|=6 \ \ldots\ldots (\mathrm{m}).$$

Nula izraza u vertikalnim crtama je $x=\frac{25}{8}$, pa interval $\left(\frac{5}{2},\ \infty\right)$ dijelimo na podintervale $\left(\frac{5}{2},\ \frac{25}{8}\right]$ i $\left(\frac{25}{8},\ \infty\right)$.

I) Za $x\in\left(\frac{5}{2},\ \frac{25}{8}\right]$ imamo da je $8x-25\leqslant 0$, pa iz (m) slijedi:

$$-8x+25=6$$

$$x_7=\frac{19}{8}\notin\left(\frac{5}{2},\ \frac{25}{8}\right].$$

II) Za $x\in\left(\frac{25}{8},\ \infty\right)$ imamo iz (m) da je $8x-25>0$, pa je:

$$8x-25=6$$

$$x_8=\frac{31}{8}\in\left(\frac{25}{8},\ \infty\right).$$

Dakle, jedina rješenja polazne jednačine su $x_1=-\frac{15}{8}$, $x_4=\frac{7}{8}$, $x_5=\frac{9}{8}$ i $x_8=\frac{31}{8}$.

12.

Riješiti jednačinu $|(x+2)(x-1)|-|(x+1)(x-2)|=a$, gdje je a realan parametar.

Rješenje. Odredimo podintervale u kojima je:

$$(x+2)(x-1)\lesseqgtr 0 \quad \text{i} \quad (x+1)(x-2)\lesseqgtr 0.$$

x	$-\infty$	↗	-2	↗	1	↗	∞
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$(+)\ x\in(-\infty,\ -2)$

$(-)\ x\in(-2,\ 1)$

$(+)\ x\in(1,\ \infty)$

x	$-\infty$	↗	-1	↗	2	↗	∞
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$(+)\ x\in(-\infty,\ -1)$

$(-)\ x\in(-1,\ 2)$

$(+)\ x\in(2,\ \infty)$.

Iz prednjeg proizilazi da je:

$\binom{+}{+}\ x\in(-\infty,\ -2]\cup(2,\ \infty)$

$(\pm)\ x\in(1,\ 2]$

$(\mp)\ x\in[-2,\ -1]$

$\binom{-}{-}\ x\in[-1,\ 1]$

(1) $(x+2)(x-1)-(x+1)(x-2)=a$

(2) $(x+2)(x-1)+(x+1)(x-2)=a$

(3) $-(x+2)(x-1)-(x+1)(x-2)=a$

(4) $-(x+2)(x-1)+(x+1)(x-2)=a$

(1) $(x^2+x-2)-(x^2-x-2)=a$

(2) $(x^2+x-2)+(x^2-x-2)=a$

(3) $-(x^2+x-2)-(x^2-x-2)=a$

(4) $-(x^2+x-2)+(x^2-x-2)=a$

(1) $x^2+x-2-x^2+x+2=a$

(2) $x^2+x-2+x^2-x-2=a$

(3) $-x^2-x+2-x^2+x+2=a$

(4) $-x^2-x+2+x^2-x-2=a$

(1) $2x=a$

(2) $2x^2-4=a$

(3) $-2x^2+4=a$

(4) $-2x=a$

(1) $x_1=\frac{a}{2}$; $x\in(-\infty, -2]\cup(2, +\infty)$

(2) $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{a+4}{2}}$; $x\in[1, 2]$

(3) $x_{4,5}=\pm\sqrt{\frac{4-a}{2}}$; $x\in[-2, -1]$

(4) $x_6=-\frac{a}{2}$; $x\in[-1, 1]$

$x_1=\frac{a}{2}$ je rješenje date jednačine uz uslov da je $\frac{a}{2}\leqslant-2$, tj.

$a\leqslant-4$ ili $\frac{a}{2}\geqslant2$ tj. $a\geqslant4$.

$x_2=\sqrt{\frac{a+4}{2}}$ je rješenje date jednačine uz uslov $4+a\geqslant0$, tj. $a\geqslant-4$

i $1\leqslant\sqrt{\frac{4+a}{2}}\leqslant2$, tj. $-2\leqslant a\leqslant4$.

$x_3=-\sqrt{\frac{a+4}{2}}$ nije rješenje date jednačine jer bi pored uslova da je $a+4\geqslant0$ trebalo da bude

$1\leqslant-\sqrt{\frac{a+4}{2}}\leqslant2$ što je nemoguće jer nema negativnih brojeva $x\in[1, 2]$.

$x_4=\sqrt{\frac{4-a}{2}}$ nije rješenje date jednačine jer bi pored uslova da je

$4-a\geqslant0$ moralo da bude $-2\leqslant\sqrt{\frac{4-a}{2}}\leqslant-1$ što je nemoguće jer nema pozitivnih brojeva $x\in[-2, -1]$.

$x_5=-\sqrt{\frac{4-a}{2}}$ je rješenje date jednačine uz uslov da je $4-a\geqslant0$,

tj. $a\leqslant4$ i $-2\leqslant-\sqrt{\frac{4-a}{2}}\leqslant-1$, tj. $-4\leqslant a\leqslant2$.

$x_6=-\frac{a}{2}$ je rješenje date jednačine za $-1\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant1$, tj. $-2\leqslant a\leqslant2$.

Prema tome, data jednačina ima sljedeća jedina rješenja:

1) $x=\frac{a}{2}$ za $a\in(-\infty, -4]\cup[4, \infty)$

2) $x=\sqrt{\frac{a+4}{2}}$ za $a\in[-2, 4]$

3) $x=-\sqrt{\frac{4-a}{2}}$ za $a\in[-4, 2]$

4) $x=-\frac{a}{2}$ za $a\in[-2, 2]$.

13.

Riješiti jednačinu $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$.

Rješenje

Za $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ i $2^{x+1}-1=0 \Rightarrow x=-1$

pa datu jednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty, -2)$, $[-2, -1)$, $[-1, \infty)$ intervala $(-\infty, \infty)$.

I) Za $x\in(-\infty, -2)$ je:

$2^{-x-2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1$

$2^{-(x+2)}=2$

$-(x+2)=1$

$x=-3\in(-\infty, -2)$

II) Za $x\in[-2, -1)$ je:

$2^{x+2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1$

$2^{x+2}=2$

$x+2=1$

$x=-1\notin[-2, -1)$

III. Za $x\in[-1, \infty)$ je:

$2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1$

$2^{x+2}=2^{x+2}$.

Dobijeni rezultat ima smisla za svako $x\in[-1, \infty)$.
Prema tome, data jednačina ima rješenje $x=-3$ i svako $x\geqslant-1$.

14.

Riješiti jednačinu $\log_2\sqrt{(1-x)^2}=3$.

Rješenje. Na osnovu definicije $\sqrt{a^2}=|a|$ data jednačina će poprimiti oblik:

$\log_2|1-x|=3$, $(x\neq1)$

$|1-x|=2^3$

$|1-x|=8$

I) Za $x \in (-\infty, 1)$ je:

$1 - x = 8$

$x = -7$

II) Za $x \in (1, \infty)$ je:

$-(1-x) = 8$

$-1 + x = 8$

$x = 9.$

Prema tome, rješenja date jednačine su: $x_1 = -7$ i $x_2 = 9$.

15.

Riješiti jednačinu $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$, gdje je a realan broj.

Rješenje: $12^{2|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$ (uvedimo smjenu $12^{|x|} = y \geqslant 1$)

$y^2 - 2y + a = 0$

$y = 1 \pm \sqrt{1-a}$, itd.

Za $a \leqslant 1$ rješenje date jednačine je:
$x = \pm \log_{12}(1 + \sqrt{1-a})$. Za druge vrijednosti parametra a jednačina nema rješenja.

16.

Za koje vrijednosti nepoznate x jednačina

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| = \frac{x}{x+1}$$

predstavlja identitet?

Rješenje. Da bi data jednačina bila identički zadovoljena za sve vrijednosti x, potrebno je i dovoljno da je $x \neq -1$ i

$$\frac{x}{x+1} \geqslant 0, \text{ tj.}$$

x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x}{x+1}$	$+$	$+$	nije defin.	$-$	0	$+$	$+$

$x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty).$

17.

Za koje vrijednosti x jednačina

$$\left| x - \frac{x^2}{x+1} \right| = x - \frac{x^2}{x+1}$$

predstavlja identitet?

Rješenje. Data jednačina će predstavljati identitet za sve one vrijednosti x za koje je:

$$x - \frac{x^2}{x+1} \geqslant 0, \text{ tj.}$$

$$\frac{x^2 + x - x^2}{x+1} \geqslant 0, \text{ tj.}$$

$$\frac{x}{x+1} \geqslant 0.$$

Rješenje dobijene nejednačine dato je u prethodnom primjeru, pa je data jednačina identitet za svako

$x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty).$

18.

Za koje vrijednosti x jednačina

$$|2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} - 1$$

predstavlja identitet?

Rješenje. Data jednačina će predstavljati identitet za sve vrijednosti x za koje je:

$2^{x+1} - 1 \geqslant 0$

$2^{x+1} \geqslant 1$

$2^{x+1} \geqslant 2^0$

$x + 1 \geqslant 0$

$x \geqslant -1.$

Dakle, data jednačina će predstavljati identitet za

$x \in [-1, \infty).$

19.

Riješiti nejednačinu $|x|>x$.

Rješenje. Datu nejednačinu promatrajmo u sljedeća dva podintervala:

I. Za $x\in(-\infty, 0)$

$-x>x$

$2x<0$

$x<0$ (zadovoljava)

II. Za $x\in(0, \infty)$

$x>x$ (nema smisla)

Prema tome, data nejednačina je zadovoljena za svako $x\in(-\infty, 0)$.

20.

Riješiti nejednačinu $|x-1|\geqslant 1$.

Rješenje. Na osnovu stava da iz $|x|>a$, $a\geqslant 0$ slijedi $x<-a$ ili $x>a$ data nejednačina nam daje sljedeće dvije nejednačine:

I. $x-1\leqslant -1$

$x\leqslant 0$

II. $x-1\geqslant 1$

$x\geqslant 2$.

Dakle, data nejednačina je zadovoljena za svako $x\in(-\infty, 0]\cup[2, \infty)$.

21.

Riješiti nejednačinu

$$|x+2|-|x-4|<|x+5|-|x-6|.$$

Rješenje. Datu nejednačinu treba promatrati u podintervalima

$$(-\infty, -5],\ (-5, -2],\ (-2, 4],\ (4, 6] \text{ i } (6, +\infty)$$

intervala $(-\infty, \infty)$.

I. Za $x\in(-\infty, -5]$ imamo da je:

$-(x+2)+(x-4)<-(x+5)+(x-6)$

$5<0$.

Pošto dobijeni rezultat nema smisla, to data nejednačina nema rješenja ni za jednu vrijednost $x\in(-\infty, -5]$.

II. Za $x\in(-5, -2]$ imamo da je:

$-(x+2)+(x-4)<(x+5)+(x-6)$

$-6<2x-1$

$x>-\frac{5}{2}$,

tj. rješenja su: $x\in\left(-\frac{5}{2}, -2\right]$.

Sličnom provjerom može se utvrditi da sve vrijednosti za $x\in(-2, 4]\cup$ $\cup(4, 6]\cup(6, \infty)$ zadovoljavaju nejednačinu. Prema tome, rješenja date nejednačine su: $x\in\left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$.

22.

Riješiti nejednačinu $|x-2|>|x+1|-3$.

Rješenje. Datu nejednačinu promatraćemo u sljedećim podintervalima

$$(-\infty, -1],\ (-1, 2] \text{ i } (2, +\infty) \text{ intervala } (+\infty, \infty).$$

I. Za $x\in(-\infty, -1]$ dobijamo da je:

$-(x-2)>-(x+1)-3$

$-x+2>-x-1-3$

$2>-4$.

Prema tome, nejednačina je zadovoljena za sve vrijednosti

$x\in(-\infty, -1]$.

II. Za $x\in(-1, 2]$ je:

$-(x-2)>x+1-3$

$x<2$.

Znači da je data nejednačina zadovoljena za sve one $x\in(-\infty, 2)$ koji su ujedno i u $(-1, 2]$, a to je interval $(-1, 2)$.

III. Za $x\in(2, \infty)$ imamo da je:

$x-2>x+1-3$

$-2>-2$.

Pošto dobijeni rezultat nema smisla, to data nejednačina nema rješenja u intervalu $(2, \infty)$. Prema tome, rješenja su samo $x\in(-\infty, 2)$.

23.

Riješi nejednačinu

$$||x|-2|\leqslant 1.$$

Rješenje. Na osnovu definicije $\{|x|\leqslant a,\ a\geqslant 0\}\Rightarrow -a\leqslant x\leqslant a$ naša nejednačina poprima oblik:

$$-1\leqslant |x|-2\leqslant 1$$

tj.

$$-1+2\leqslant |x|\leqslant 1+2$$

tj.

$$1\leqslant |x|\leqslant 3.$$

1. Za $x>0$ imamo da je: $\underline{1\leqslant x\leqslant 3.}$

2. Za $x<0$ imamo da je:

$$1\leqslant -x\leqslant 3/\cdot(-1)$$

$$-1\geqslant x\geqslant -3$$

tj. $\underline{-3\leqslant x\leqslant -1.}$

Dakle, skup svih rješenja date nejednačine je skup

$$[-3,\ -1]\cup[1,\ 3].$$

24.

Riješiti nejednačinu:

$$|x^2-4x|+3\geqslant x^2+|x-5|.$$

Rješenje. Datu nejednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty,\ 0]$, $(0,\ 4]$, $(4,\ 5]$ i $(5,\ \infty)$ intervala $(-\infty,\ \infty)$.

I. Za $x\in(-\infty,\ 0]$ imamo da je:

$$x^2-4x+3\geqslant x^2-x+5$$

$$-3x\geqslant 2$$

$$x\leqslant -\frac{2}{3}$$

tj.

$$x\in\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right]\subset(-\infty,\ 0].$$

II. Za $x\in(0,\ 4]$ dobijamo da je:

$$-x^2+4x+3\geqslant x^2-x+5$$

$$-2x^2+5x-2\geqslant 0$$

$$2x^2-5x+2\leqslant 0.$$

x	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	∞
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x-\frac{1}{2}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x^2-5x+2$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$$x\in\left[\frac{1}{2},\ 2\right]\subset(0,\ 4].$$

III. Za $x\in(4,\ 5]$ dobijamo da je:

$$x^2-4x+3\geqslant x^2-x+5$$

$$-3x\geqslant 2$$

$$x\leqslant -\frac{2}{3}$$

tj.

$$x\in\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right]\not\subset(4,\ 5].$$

IV. Za $x\in(5,\ \infty)$ dobijamo da je:

$$x^2-4x+3\geqslant x^2+x-5$$

$$-5x\geqslant -\infty$$

$$x\leqslant\frac{8}{5}$$

tj.

$$x\in\left(-\infty,\ \frac{8}{5}\right]\not\subset(5,\ \infty).$$

Prema tome, data nejednačina je zadovoljena za svako

$$x\in\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2},2\right].$$

25.

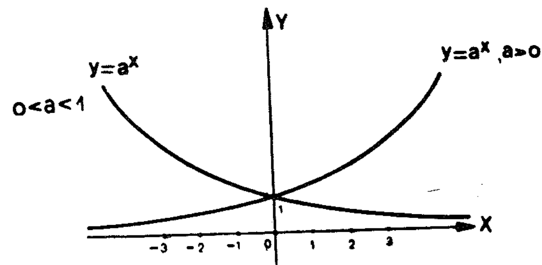
Riješiti nejednačinu $|x|^{x^2-x-2}<1.$

Rješenje. Lijeva strana date nejednačine je eksponencijalna funkcija. Po definiciji eksponencijalne funkcije a^x, njena osnova može biti $a>1$ i $0<a<1$. Eksponencijalna funkcija na lijevoj strani nejednakosti imaće ordinate (<1) u sljedeća dva slučaja:

1. Baza $|x|>1$, eksponent $x^2-x-2<0$.

2. Baza $0<|x|<1$, eksponent $x^2-x-2>0$.

To se jasno vidi i sa sljedeće slike:



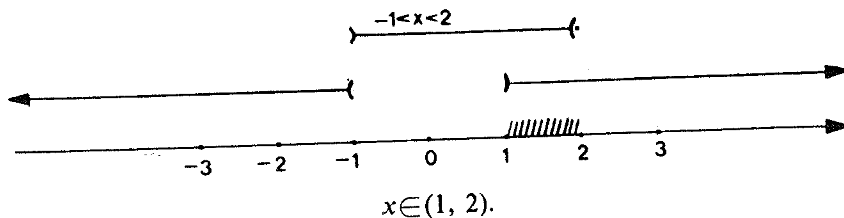
1. $|x|>1 \Rightarrow x<-1$ ili $x>1$

$x^2-x-2<0$

$(x-2)(x+1)<0$

x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(x+1)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$-1<x<2$



$x\in(1, 2)$.

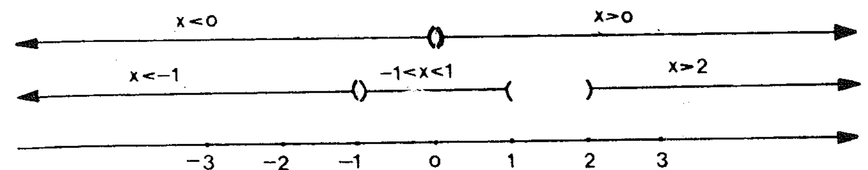
2. $0<|x|<1 \Rightarrow$ a) $|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$

b) $|x|>0 \Rightarrow x<0$ ili $x>0$

$x^2-x-2>0$

$(x-2)(x+1)>0$.

Iz prednje tabele se vidi da je ova nejednačina zadovoljena za svako $x\in(-\infty, -1)\cup(2, \infty)$.



Za promatrane uslove nejednačina nema ni jedno rješenje. Prema tome, data nejednačina će biti zadovoljena samo za $x\in(1, 2)$

Napomena: Zadatak se mogao jednostavnije riješiti logaritmovanjem lijeve i desne strane, pri čemu se dobija da je:

$(x^2-x-2)\ln|x|<0$

$(x+1)(x-2)\ln|x|<0$, itd.

26.

Riješiti nejednačinu $|x+1|^{x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}}<1$.

Rješenje. Lijeva strana date nejednačine je eksponencijalna funkcija, pa će ona imati ordinate (<1) u sljedeća dva slučaja:

1. Baza $|x+1|>1$, eksponent $x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}<0$.

2. Baza $0<|x+1|<1$, eksponent $x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}>0$.

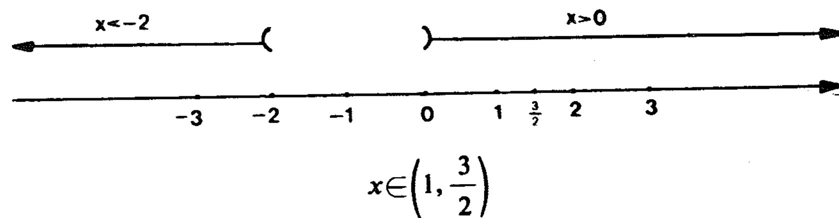
1. $|x+1|>1 \Rightarrow x<-2$ ili $x>0$

$x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}<0$

$(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0$

x	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$1<x<\frac{3}{2}$



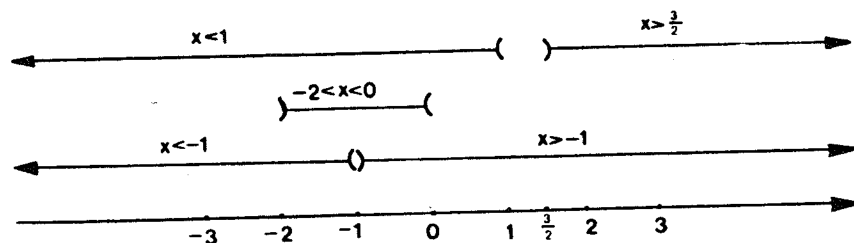
$$x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$$

2. $0<|x+1|<1 \Rightarrow (-2<x<0)$ i

$(x\neq -1) \Rightarrow x\in(-2,\ -1)\cup(-1,\ 0)$

$$x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}>0$$

$$(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0$$



Iz prednje tabele vidljivo je da je ova nejednačina zadovoljena za svako $x\in(-\infty,\ 1)\cup\left(\frac{3}{2},\ \infty\right)$.

Prema tome, rješenja date nejednačine su:

$$x\in(-2,\ -1)\cup(-1,\ 0)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right).$$

27.

Riješiti nejednačinu $|x^2-2x-3|<3x-3$.

Rješenje. Datu nejednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty,\ -1]$, $(-1,\ 3]$, $(3,\ \infty)$. Prema tome, imamo da:

I. Za $x\in(-\infty,\ -1]$ je

$$x^2-2x-3<3x-3$$

$$x(x-5)<0.$$

II. Za $x\in(-1,\ 3]$ je

$$-x^2+2x+3<3x-3$$

$$x^2+x-6>0$$

$$(x-2)(x+3)>0.$$

x	$-\infty$	↗	0	↗	5	↗	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$$x\in(0,\ 5)\not\subset(-\infty,\ -1)$$

x	$-\infty$	↗	-3	↗	2	↗	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(x+3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$$x\in(-\infty,\ -3)\not\subset(-1,\ 3].$$

II. $x\in(2,\ \infty)$. Ovaj interval u cjelosti nije podskup intervala $(-1,\ 3]$ pa zato rješenja su samo brojevi iz njegovog dijela $(2,\ 3]\subset(-1,\ 3]$.

III. Za $x\in(3,\ \infty)$ dobijamo:

$$x^2-2x-3<3x-3$$

$$x(x-5)<0.$$

Iz prve tabele se vidi da je $x\in(0,\ 5)$. Pošto ovaj interval nije podskup intervala $(3,\ \infty)$, to su rješenja samo brojevi x iz intervala $(3,\ 5)\subset(3,\ \infty)$.

Prema tome, rješenja date nejednačine su $x\in(2,\ 5)$.

28.

Riješiti nejednačinu $4|x^3-2x+1|\cdot|\sin x+2\cos x|\geqslant 9|x^3-2x+1|$.

Rješenje.

1. Ako je $x^3-2x+1\neq 0$, onda je:

$$4|x^3-2x+1|\cdot|\sin x+2\cos x|\geqslant 9|x^3-2x+1|$$

ili

$$|\sin x+2\cos x|\geqslant\frac{9}{4}. \qquad (1)$$

Međutim, na osnovu relacije $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ imamo

$$|\sin x+2\cos x|\leqslant\sqrt{1+4}$$

$$|\sin x+2\cos x|\leqslant\sqrt{5}. \qquad (2)$$

Pošto je $\sqrt{5}<\frac{9}{4}$, to nejednakosti (1) i (2) nisu saglasne, pa pri $x^3-2x+1\neq 0$ data nejednačina nema rješenja.

2. Ako je pak $x^3-2x+1=0$, tj.

$$x^3-2x+1\equiv x^3-x-x+1=x(x^2-1)-(x-1)=$$
$$=(x-1)(x^2+x-1)=0$$

$$x_1=1,\quad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Dakle, za dobijene vrijednosti za x_1 i $x_{2,3}$ data nejednačina postaje jednakost $0=0$, pa su joj rješenja:

$$x_1=1,\quad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

29.

Riješi nejednačinu $|\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x|<\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Rješenje. Datu nejednačinu napišimo u obliku:

$$\left|\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right|<\frac{4}{\sqrt{3}},\quad \text{ili}$$

$$\left|\frac{1}{\sin x\cos x}\right|<\frac{4}{\sqrt{3}},\quad \text{ili}$$

$$\frac{2}{|\sin 2x|}<\frac{4}{\sqrt{3}},\quad \text{ili}$$

$$\frac{|\sin 2x|}{2}>\frac{\sqrt{3}}{4},\quad \text{ili}$$

$$|\sin 2x|>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Međutim, na osnovu jednakosti $\sqrt{a^2}=|a|$ imamo da je:

$$\sqrt{\sin^2 2x}>\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin^2 2x>\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}>\frac{3}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-\cos 4x>\frac{3}{2}\Rightarrow \cos 4x<1-\frac{3}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos 4x<-\frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{3}+2k\pi<4x<\frac{4\pi}{3}+2k\pi;\quad \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},$$
$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

30.

Riješiti nejednačinu $\frac{1}{|x|}-x>2$.

Rješenje. Očigledno, datu nejednačinu treba promatrati u podintervalima $(-\infty,0)$ i $(0,\infty)$ intervala $(-\infty,\infty)$.

I) Za $x\in(-\infty,0)$ dobijamo da je:

$$-\frac{1}{x}-x>2$$
$$\frac{1}{x}+x+2<0$$
$$\frac{x^2+2x+1}{x}<0$$
$$\frac{(x+1)^2}{x}<0.$$

Dobijena nejednakost će biti manja od nule, za $x<0$ i $x\neq -1$, jer za $x=-1$ brojilac se anulira, pa nejednakost poprima oblik $0<0$ što nema smisla. Dakle, rješenja su:

$$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0).$$

II) Za $x\in(0,\infty)$ je

$$\frac{1}{x}-x>2$$
$$x-\frac{1}{x}+2<0$$
$$\frac{x^2+2x-1}{x}<0$$
$$\frac{(x+x_1)(x-x_2)}{x}<0\qquad \text{gdje je } x_1\approx -2{,}41 \text{ i } x_2\approx 0{,}41.$$

x	$-\infty$	↗	x_1	↗	0	↗	x_2	↗	$+\infty$
$x+x_1$	−	−	0	+	+	+	+	+	+
$x-x_2$	−	−	−	−	−	−	0	+	+
x	−	−	−	−	0	+	+	+	+
$\frac{(x+x_1)(x-x_2)}{x}$	−	−	0	+		−	0	+	+

$$x\in(-\infty,x_1)\cup(0,x_2)$$

Prema tome, skup svih rješenja je:

$$x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;x_2).$$

31.

Riješiti nejednačinu $\log_3 \dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0.$

Rješenje. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1$

$$|x^2-4x|+3 \geqslant x^2+|x-5|.$$

Posmatrajmo dobijene nejednačine u podintervalima: $(-\infty, 0]$, $(0, 4]$, $(4, 5]$ i $(5, \infty)$ uvjerićemo se da su rješenja u prvom i drugom podintervalu i to $x \leqslant -\dfrac{2}{3}$ i $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$, dok ih u trećem i četvrtom podintervalu nema.

32.

Riješi nejednačinu: $|3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3^{1-\operatorname{tg}\pi x}| \geqslant 2.$

Rješenje. Uvođenjem smjene $3^{\operatorname{tg}\pi x} = y > 0$ data nejednačina poprima oblik: $\left|y - \dfrac{3}{y}\right| \geqslant 2$

tj.

$$|y^2-3| \geqslant 2y \text{ i } y > 0.$$

1) Ako je $y \geqslant \sqrt{3}$, onda nejednačina poprima oblik:

$$y^2-2y-3 \geqslant 0$$

tj.

$$(y-3)(y+1) \geqslant 0 \text{ i } y \geqslant 3$$

tada je:

$3^{\operatorname{tg}\pi x} \geqslant 3$, tj. $\operatorname{tg}\pi x \geqslant 1$, a to je slučaj kada je:

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant \pi x < k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

tj.

$$\frac{4k+1}{4} \leqslant x < \frac{2k+1}{4}$$

2) Ako je $y < \sqrt{3}$, onda nejednačina poprima oblik:

$$y^2+2y-3 \leqslant 0$$

tj.

$$(y+3)(y-1) \leqslant 0 \text{ i } 0 < y \leqslant 1$$

tada je:

$3^{\operatorname{tg}\pi x} \leqslant 1$, tj. $\operatorname{tg}\pi x \leqslant 0$, a to je slučaj kada je:

$$k\pi + \frac{\pi}{2} < \pi x \leqslant k\pi + \pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

tj.

$$\frac{2k+1}{2} < x \leqslant k+1.$$

Dakle, rješenja su:

$$x \in \left[\frac{4k+1}{4}, \frac{2k+1}{2}\right) \cup \left(\frac{2k+1}{2}, k+1\right], \ k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

33.

Odrediti parametar λ tako, da nejednačina:

$$\left|\frac{(\lambda+2)x}{x^2-x+1}\right| < 1$$

bude zadovoljena za sve vrijednosti nepoznate x.

Rješenje. Data nejednačina poprima oblik dvojne nejednakosti

$$-1 < \frac{(\lambda+2)x}{x^2-x+1} < 1$$

tj. raspada se na dvije nejednačine:

(1) $\dfrac{(\lambda+2)x}{x^2-x+1} < 1$

(2) $\dfrac{(\lambda+2)x}{x^2-x+1} > -1$

(1) $\dfrac{-x^2+(\lambda+3)x+1}{x^2-x+1} < 0$

(2) $\dfrac{x^2+(\lambda+1)x+1}{x^2-x+1} > 0$

Pošto je imenilac kod obje nejednačine pozitivan, za svako realno x, to je:

(3) $-x^2+(\lambda+3)x-1 < 0$

(4) $x^2+(\lambda+1)x+1 > 0$

(3) $x^2-(\lambda+3)x+1 > 0$

(4) $x^2+(\lambda+1)x+1 > 0.$

Kvadratni trinomi na lijevoj strani nejednačine (3) i (4) biće pozitivni, tj. veći od nule ako su im diskriminante manje od nule, tj. $D_1 < 0$ i $D_2 < 0$ jer im je koeficijent uz kvadratni član pozitivan.

Dakle, imaćemo:

(a) $D_1=(\lambda+3)^2-4<0$

$\lambda^2+6\lambda+5<0$

$(\lambda+1)(\lambda+5)<0$

	$-\infty$	↗	-5	↗	-1	↗	$+\infty$
$\lambda+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\lambda+5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(\lambda+1)(\lambda+5)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$\lambda\in(-5,\ -1)$

(b) $D_2=(\lambda+1)^2-4<0$

$\lambda^2+2\lambda-3<0$

$(\lambda+3)(\lambda-1)<0$

	$-\infty$	↗	-3	↗	1	↗	$+\infty$
$\lambda+3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\lambda-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(\lambda+3)(\lambda-1)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$\lambda\in(-3,\ 1)$.

Prema tome rješenja su:

$\lambda\in(-5,\ -1)\cap(-3,\ 1)=(-3,\ -1)$.

34.

Odrediti k da za svako x bude

$$\left|\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}\right|<3.$$

Rješenje. Data nejednakost je ekvivalentna skupu nejednakosti

$$-3<\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3$$

tj. imamo da je:

I) $\dfrac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3$ II) $\dfrac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}>-3$

$\dfrac{2x^2+(k+3)x+2}{x^2+x+1}>0.$ $\dfrac{4x^2-(k-3)x+4}{x^2+x+1}>0.$

Pošto je imenilac kod obje nejednačine pozitivan za svako realno x, to je:

(1) $2x^2+(k+3)x+2>0$

(2) $4x^2-(k-3)x+4>0$,

Kvadratni trinom na lijevoj strani nejednačine (1) i (2) biće pozitivan, tj. veći od nule ako su im diskriminante manje od nule, tj. $D_1<0$, i $D_2<0$ jer im je koeficijent uz kvadratni član pozitivan. Dakle, imaćemo:

(1) $D_1=(k+3)^2-16<0$

$k^2+6k-7<0$

$(k-1)(k+7)<0.$

k	$-\infty$	↗	-7	↗	1	↗	$+\infty$
$k-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$k+7$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(k-1)(k+7)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$k\in(-7,\ 1)$

(2) $D_2=(k-3)^2-64<0$

$k^2-6k-55<0$

$(k-11)(k+5)<0.$

k	$-\infty$	↗	-5	↗	11	↗	$+\infty$
$k-11$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$k+5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(k-11)(k+5)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

$k\in(-5,\ 11)$

Prema tome, rješenje je:

$k\in(-7,\ 1)\cap(-5,\ 11)=(-5,\ 1)$.

35.

Svesti date izraze na prostiji oblik, pa onda izračunati njihovu vrijednost:

a) $3|m|+2|m|+4|m|-4|-m|$, za $m=-2$.

b) $4|x|-2|a|+6|x|-3|a|+4|a|-2|a|+6|-x|$, za $x=-0{,}15$, $a=0{,}03$.

c) $|7a-3b-6a+3b|$, za $a=-5$, $b=-1$.

36.

Riješiti jednačine i predstaviti na brojnoj osi tačke koje odgovaraju njihovim rješenjima:

a) $|x|=5$, b) $|4x|=1$, c) $|-3x|=6$, d) $|10x|=0$,

e) $|x-1|=3$, f) $|6-2x|=0$, g) $|x+3|=|x-5|$,

h) $|x-1|+|x-3|=2$.

37.

Odrediti skup cjelobrojnih vrijednosti x, koje zadovoljavaju nejednačine, i pridružiti ih odgovarajućim tačkama na brojnoj osi:

a) $|2x|<5$, b) $|-0{,}6x|<3$, c) $\left|-\frac{2}{3}x\right|<1{,}2$,

d) $|x-2|<3$, e) $1<|x-3|<4$, f) $|x-1|\leqslant|x+3|$.

38.

Provjeriti jednakost $|ab|=|a|\,|b|$ uzimajući da je:

a) $a=-5$, $b=4$, b) $a=-7{,}5$, $b=-0{,}4$, c) $a=0$, $b=\frac{3}{4}$.

39.

Provjeriti nejednakost $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ uzimajući da je:

a) $a=-3{,}3$, $b=-0{,}01$, b) $a=3$, $b=0$, c) $a=0$, $b=-3$.

Provjeriti nejednakost $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ uzimajući da je:

a) $a=10$, $b=-3$ b) $a=-1{,}2$, $b=-0{,}8$ c) $a=-2{,}3$, $b=2{,}3$.

40.

Šta se može reći o brojevima x i y ako je:

a) $x^2=y^2$, b) $|x|=|y|$, c) $|x|+|y|=0$, d) $|x+y|=0$?

41.

Riješiti jednačine i njihova rješenja predstaviti na brojnoj osi:

a) $|x-1|=3$, b) $|x-3|=2-|x-1|$, c) $|x|=2x+1$.

42.

Riješiti nejednačine i rješenja naznačiti na brojnoj osi:

a) $|x-2|<3$, b) $1<|x-3|<4$, c) $|x-1|\geqslant|x+3|$.

43.

Koji su od brojeva $(-5)^0$, $|-5|^0$, -5^0, 5^0 međusobno jednaki?

44.

Uprostiti izraz $3a+2+\sqrt{(2a-3)^2}-\sqrt{(4-a)^2}$ za $|a|<1{,}5$

45.

Riješiti jednačine

a) $|x|^2-4x+3=0$, b) $|x^2-5x|=6$, c) $|3x^2+5x-3|=5$,

d) $|x^2+5|=6x$, e) $|x^2-21|=-4x$, f) $2x^2-3|x|-5=0$.

46.

Koristeći se jednakošću $|a|\cdot|b|=|a\cdot b|$ riješiti jednačine:

a) $|x-2|\,|x+3|=|x+1|\,|x+6|$

b) $|x-6{,}5|\,|x-1{,}5|=|x-3{,}5|\,|x+1{,}5)$.

47.

Riješiti jednačine

a) $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=4$, b) $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+4)^2}=7$.

48.

Riješiti jednačine

a) $\sqrt{x^2+2}=|x|$, b) $|x^2-x-2|=2x^2+3x+1$,

c) $\sqrt{x^2-|x+2|}=2x-|x+1|$, (rješenje $x=3$),

d) $\left|4-2|x|\right|=1$, $\left(\text{rješenja su brojevi } \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}\right)$,

e) $\frac{|x+1|}{2}-\frac{|x-1|}{2}=x^3-2x^2+x$, f) $|x^2-2x|+|x^2-2|=1+|x|$.

49.

Riješiti jednačine

a) $|x|-|x+2|=0$, b) $|3x-1|+|4x-3|-|x-5|=5$,

c) $|x-2|+|x+1|=|2x+3|$, d) $3x-2|x+1|-|x-5|=3$.

50.

Odrediti realne brojeve x za koje je

$$|3x-2|+|3x+1|=3.$$

51.

Riješiti jednačinu

$|x^2-3|x|+1|=1$, (rješenje je svaki broj iz skupa brojeva $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$).

52.

Riješiti jednačinu

$x|x|+|2x^2-5x|=6$, (rješenja su $x_1=-1$ i $x_2=2$).

53.

Riješiti jednačinu $\left|\left|\left||x|-4\right|-3\right|-2\right|=1$.

54.

Riješiti jednačinu $|x^2+2x|+|x^2-1|-|x|=a$, gdje je a realan broj.

55.

Riješiti po a jednačinu $|x-a|+|x+a|=2|a|$.

56.

Riješiti jednačine

a) $\frac{x+3}{4}-\frac{|x-4|}{9}=\frac{1}{2}-\frac{x+5}{36}$, $\left(x=\frac{1}{7}\right)$,

b) $2|x|-|x+1|=2$, $(x_1=-1, x_2=3)$.

57.

Riješiti jednačinu

a) $2^{|x|+3}-2^{|x|}=112$

b) $\ln|1-2x|=1$.

58.

Riješiti jednačinu:

$$|x^2-1{,}5x-1|=-x^2-4x+a, \quad (x, a\in\mathbb{R}).$$

Rješenje. Ako je $a<-\frac{57}{32}$, onda jednačina nema rješenja. Kada je $-\frac{57}{32}\leqslant a\leqslant-\frac{7}{4}$ ili $a\geqslant 12$, jednačina ima dva rješenja:

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{57+32a}}{8}$, pri čemu, ako je $a=-\frac{57}{32}$, onda je $x_1=x_2=-\frac{5}{8}$.

Takođe, kada je $-\frac{7}{4}<a<12$ jednačina ima dva rješenja:

$$x_1=\frac{2}{11}(a-1) \text{ i } x_2=\frac{-5+\sqrt{57+32a}}{8}.$$

59.

Riješiti jednačinu

$$|\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x|=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\left(x=\frac{k\pi}{2}\pm(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6},\ k=0, \pm1, \pm2, \ldots\right).$$

60.

Riješiti nejednačinu

a) $|x|+x<1$, b) $x-|x|>2$, c) $|x^2-x|+x>1$,

d) $\sin x+|\sin x|>1$, e) $|\sin x|<|\cos x|$.

61.

Riješiti nejednačinu

a) $|x+3|>|2x-1|$, $x\in\left(-\frac{2}{3}, 4\right)$,

b) $\left|1-|x-1|\right|<1$, $x\in(-1, 1)\cup(1, 3)$,

c) $||x+1|-|x-1||<1, \quad x\in\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

d) $\left|\frac{x+1}{3-2x}\right|>1$, e) $|x^2-3x+2|-1\geq x-2$,

f) $|x+\sqrt{1-x^2}|\leq 2, \quad x\in[-1, 1]$,

g) $\left|\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}\right|\leq 1, \quad x\in(-\infty, 0]$.

62.

Riješiti nejednačinu

$$\log_{3+|x^2-4x|}(x^2+|x-3|)<1.$$

Uputa. $x^2+|x-3|<3+|x^2-4x|$, itd.

$$x\in(-\infty, 0)\cup\left(0, \frac{5}{2}\right).$$

63.

Riješiti nejednačinu $\text{tg}^2 x\leq|1-2\,\text{ctg}^2 x|$.

Uputa: $\text{tg}^2 x=y>0$, tada dobijamo $y^2\leq|y-2|$, itd.
Rješenja su:

$$k\pi-\frac{\pi}{4}\leq x<0 \text{ i } 0<x\leq k\pi+\frac{\pi}{4}, \quad k\in\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

64.

Riješiti nejednačinu $x-1<|x^2-5x+4|$.

Rješenje: $x\in(-\infty, 1)\cup(1, 3)\cup(5, \infty)$.

65.

Za koje vrijednosti k jednačina

$$|x+1|-|x-1|=kx+1$$

ima samo jedno rješenje?

66.

Naći sve vrijednosti parametara a za koje jednačina

$$x^2-|x|+a=0$$

ima samo jedno rješenje.

Napomena: na pismenom ispitu iz »Uvoda u matematiku« na Elektro-tehničkom fakultetu u Tuzli ovaj zadatak su rješavala samo dva studenta i to na dva različita načina. Ostavlja se čitaocu da prosudi da li je koji student u pravu i da li ima još nešto da se doda ovim rješenjima, pa da su potpuna.

I Varijanta

Poznato nam je da je $x^2=|x|^2$ pa data jednačina poprima oblik:

$$|x|^2-|x|+a=0.$$

Pošto je dobijena jednačina kvadratna po $|x|$, to će ona imati jedno rješenje' ako joj je diskriminanta jednaka nuli, tj. $D=1-4a=0$, odakle slijedi da je $a=\frac{1}{4}$. Znači, za $a=\frac{1}{4}$ data jednačina će imati samo jedno rješenje.

II Varijanta

Neka data jednačina ima korijen x_0. Onda je jasno da će njen korijen biti i $-x_0$. Međutim, da bi korijen bio jedinstven, neophodno je da bude $x_0=-x_0$. To je moguće samo pod uslovom kada je $x_0=0$. Ako uvrstimo dobijenu vrijednost $x_0=0$ u datu jednačinu, dobiće se da je $a=0$. Znači, samo za $a=0$ data jednačina ima samo jedno rješenje.

67.

Za koje realne vrijednosti parametra m nejednačina

$$x^2-2mx+2|x-m|+2<0$$

ima bar jedno rješenje?

Uputstvo: Datu nejednačinu napišemo u obliku:

$$(x-m)^2+2|x-m|+2-m^2<0,$$

ili

$$\begin{cases} y^2+2y+2-m^2<0 & (1)\\ y\geq 0 & (2)\end{cases}$$

gdje je $y=|x-m|$. Sistem nejednačina (1) i (2) imaće bar jedno rješenje samo onda kada je diskriminanta lijeve strane nejednačine (1) pozitivna, a veći korijen y_2 leži desno od nule, tj.:

$$\begin{cases} m^2-1>0\\ -1+\sqrt{m^2-1}>0\end{cases}$$

tj.

$$\begin{cases} m^2>1\\ m^2>2.\end{cases}$$

Prema tome, rješenje je svako $m\in(-\infty, -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}, +\infty)$.

68.

Riješiti nejednačinu

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{\log|x-2|}{(x+2)}} \leqslant (2\sqrt{2})^{\frac{-\log(11-2x)}{(x+2)}}$$

Rješenje: $x \in [1-\sqrt{8},\ -1) \cup [1+\sqrt{8}, +\infty)$.

69.

Riješiti nejednačine

a) $x^2 - 2|x+1| < 0$, $\quad x \in (1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$,

b) $(|x|-1)^2 > 2$, $\quad x \in (-\infty,\ -1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2},\ +\infty)$.

70.

Postoje li takve vrijednosti parametra a za koje je svako rješenje nejednačine

$$\sqrt{x^2+4x+3} \geqslant -1-x$$

ujedno i rješenje jednačine:

$$|x-a| - |x+1| = 2$$

i obratno, svako rješenje jednačine da je ujedno i rješenje nejednačine?

Rješenje. Rješenja nejednačine su $x \geqslant -1$. Za $x > a$, $x > -1$ jednačina poprima oblik: $x-a-x-1=2$, odakle se dobija da je $a=-3$. Lako je provjeriti da je skup svih rješenja jednačine $|x+3| - |x+1| = 2$ razmak $[-1, +\infty)$. Dakle, $a=-3$.

71.

Postoje li takve vrijednosti parametra a, za koje je svako rješenje nejednačine

$$\sqrt{x^2+4x+7} \leqslant x+3$$

ujedno i rješenje jednačine

$$2^{x+2} - |2^{x+1} - a| = 2^{x+1} + 1$$

i obratno, svako rješenje jednačine da je ujedno i rješenje nejednačine?

Rješenje: $a=1$.

72.

Riješiti nejednačinu

$$|\log_{|x|}(4+3x-x^2) - 1| \leqslant \frac{1}{2} \log_{\sqrt{x-1}}(x-1).$$

Rješenje: $\dfrac{3+\sqrt{41}}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

73.

Riješiti nejednačinu

$$\log_{1-x^2}(x+1)^4 \leqslant \log_{\sqrt{2x-1}}|1-2x|.$$

Rješenje: $\dfrac{1}{2} < x < 1$.

74.

Riješiti nejednačinu

$$\log_{\left|x-\frac{1}{2}\right|}(2x+3-x^2) \leqslant \log_{|1-2x|}(2x-1).$$

Rješenje: $x \in \left(\dfrac{1}{2},\ 1\right) \cup \left(1,\ \dfrac{3}{2}\right) \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{15}}{2},\ 3\right)$.

75.

Riješiti jednačinu

$$|\operatorname{tg} x + a \cdot \operatorname{ctg} x| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Uputstvo: Uvedimo smjenu $\operatorname{tg} x = t$, pri čemu je $t \neq 0$. Onda riješiti jednačinu $t^2 \pm \dfrac{4}{\sqrt{3}} t + a = 0$.

Rješenje: $x = \pm \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{4-3a} \pm 2}{\sqrt{3}} + k\pi$, ($k$ je cio broj)

1) $a < \dfrac{4}{3}$, $a \neq 0$ dobija se četiri serije rješenja

2) $a = \dfrac{4}{3}$ ili $a=0$. pred brojem 2 nalazi se samo znak »plus«, te dobijamo dvije serije rješenja.

3) $a > \dfrac{4}{3}$ rješenja nema.

76.

Riješiti nejednačinu

$$\log_{\frac{1}{4}}\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > -1.$$

Rješenje: $x \in (-\infty, -1)$.

77.

Riješiti jednačinu

$$\log_{\sqrt{5-2x}}(x-1-|x-2|)=\log_{5-2x}(3|x-2|-3x+7).$$

Rješenje: $x \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

78.

Riješiti jednačinu

$$x+27^{\frac{5}{2}\left|\log(9\sqrt{3})^{\sqrt[3]{x}}\right|}=\frac{10}{3}.$$

Rješenje: $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{5}{3}$.

79.

Za sve realne vrijednosti broja a riješiti nejednačinu

$$\frac{x^2-2^{1-|a|}x+1}{x^2-a^2}<0.$$

Rješenje: Za $a=0$ nema rješenja, a za $a \neq 0$ rješenje je

$$-|a|<x<|a|.$$

80.

Riješiti nejednačinu

$$\log_{3+|x^2-4x|}(x^2+|x-3|)<1.$$

Rješenje: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

81.

Riješiti nejednačinu

$$|x^2-|x|+3|<5.$$

Rješenje: $x \in (-2, 2)$.

82.

Riješiti jednačinu

$$3^{x\log 5-1}-\frac{2}{3}=|5^{x\log 3+1}-24|.$$

Uputstvo: Označimo $3^{x\log 5}=5^{x\log 3}$ sa y, onda će jednačina poprimiti oblik $\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}=|5y-24|$, odakle se dobija da je $y_1=5$, $y_2=\frac{37}{8}$, odnosno

$$x_1=\frac{1}{\log 3}, \quad x_2=\frac{\log\frac{37}{8}}{\log 3 \cdot \log 5}.$$

83.

Riješiti jednačinu

$$|1+\log_{\frac{1}{3}}x|=3+|2-\log_{\frac{1}{3}}x|.$$

Rješenje: $x \in \left(0, \frac{1}{9}\right]$.

84.

Riješiti nejednačinu $\left(\frac{5}{4}\right)^{|\operatorname{ctg} x-1|}<\frac{5}{4}$.

Rješenje: $\operatorname{arcctg} 2+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

85.

Riješiti nejednačinu $10^{|\sin x|}>10^{|\cos x|}$.

Rješenje: $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

86.

Riješiti nejednačinu $\left(\frac{7}{6}\right)^{|\sin x|}>\left(\frac{7}{6}\right)^{1-|\cos x|}$

Rješenje: Zadovoljava svako x osim $x=\frac{\pi}{2}k$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

87.

Riješiti nejednačinu

$$\log_{0,25}\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}.$$

Rješenje: $x \in \left(-\frac{4}{3}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

88.

Riješiti nejednačinu $|\log_3 x| < \left|\log_3 \frac{x}{9}\right|$.

Rješenje: $x \in (0,3)$.

89.

Riješiti nejednačinu $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$.

Rješenje: $x \in (-\infty, 0) \cup (2; 3{,}5) \cup (4, \infty)$.

90.

Za koje vrijednosti x su ispunjeni identiteti:

a) $\left|\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}\right| \equiv \frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}$, $x \in (-\infty, 2] \cup (4, 6) \cup [8, \infty)$,

b) $\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right| \equiv \frac{x^3}{x^2-1}$, $x \in (-1, 0] \cup (1, \infty)$?

91.

Riješiti jednačinu $\left|x^2-3|x|+1\right| = 1$.

Rješenje: $x = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$.

2. MATEMATIČKA INDUKCIJA

Zaključivanjem nazivamo izvođenje jednog stava iz jednog ili više drugih stavova. Tako izvedeni stav naziva se *zaključak*.

U matematici se koriste dva oblika zaključivanja i to:

deduktivno i *induktivno*.

Dedukcija je zaključivanje od opšteg ka posebnom.

Indukcija je zaključivanje kojim se iz konačnog broja posebnih stavova izvodi opšti stav koji se odnosi na sve slučajeve, ili kraće: indukcija je zaključivanje od posebnog ka opštem. Ovakav metod zaključivanja naziva se još i *empirijska* ili *nepotpuna* indukcija.

Ako se konačan broj posebnih slučajeva poklapa sa skupom svih mogućih slučajeva iste vrste, tada se indukcija naziva *potpuna indukcija*. Potpuna indukcija koja se primjenjuje samo u matematici naziva se *matematička indukcija*.

Postupak kod dokazivanja opštih stavova pomoću potpune matematičke indukcije je sljedeći:

a) utvrdi se da taj stav vrijedi u jednom ili nekoliko posebnih slučajeva iste vrste,

b) pretpostavi se da taj stav vrijedi za proizvoljan broj n takvih slučajeva i

c) ako se zatim dokaže da taj stav vrijedi i za više od n takvih slučajeva, tj. $(n+1)$, onda se smatra da taj stav ima opštu vrijednost i da vrijedi za sve moguće takve slučajeve.

Prije nego što pokažemo tehniku izrade zadataka pomoću matematičke indukcije, pokazaćemo značenje simbola Σ. Na primjer: zbir $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ možemo kraće pisati ovako:

$$\sum_{k=1}^{5} x_k$$

i čita se: sigma iks kad ka ide od 1 do 5.

Primjeri:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbf{N})$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3$

6) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$

7) $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$

8) $\sum\limits_{k=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc.$

Broj k zove se *indeks sabiranja* i može se zamijeniti nekim drugim slovom. Za sume o kojima je riječ vrijede sljedeće relacije:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} {}_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k,$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (ca_k) = c \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0.$

Primjer:

$$\sum_{m=0}^{3} 2^{2m+1} = \sum_{m=0}^{3} 2^{2m} \cdot 2 = 2 \sum_{m=0}^{3} 2^{2m} =$$

$$= 2\,(2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6) = 2\,(1 + 4 + 16 + 64) = 2 \cdot 85 = 170.$$

92.

Računskim putem dokazati da je $\sum\limits_{k=1}^{n} \{n^2 - (2k-1)\,n\} \equiv 0.$

Rješenje:

$$\sum_{k=1}^{n} \{n^2 - (2k-1)\,n\} = \sum_{k=1}^{n} n^2 - \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\,n =$$

$$= n^2 \sum_{k=1}^{n} 1 - n \sum_{k=1}^{n} (2k-1 =$$

$$= n^2 \cdot n - n \left\{2 \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right\} = n^3 - n \left\{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n\right\} =$$

$$= n^3 - n^3 - n^2 + n^2 \equiv 0.$$

Takođe je važno znati da se proizvod $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ može kraće pisati ovako:

$$\prod_{k=1}^{4} a_k$$

i čita se: pe a_k kad k ide od 1 do 4.

1) $\prod\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1$

2) $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n, \quad (n \in \mathbf{N})$

3) $\prod\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}.$

93.

Metodom matematičke indukcije dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (n \in \mathbf{N}). \qquad (1)$$

Rješenje:

1) Dokažimo da data relacija vrijedi za $n=1$. Zaista je:

$$1 = \frac{1\,(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

2) Dokažimo da data relacija vrijedi i za $n=2$. Imamo:

$$1+2=\frac{2(2+1)}{2}=\frac{2\cdot 3}{2}.$$

3) Sada pretpostavimo da je data jednakost (1) tačna za ma koji prirodni broj $n=m$, tj. da je:

$$1+2+3+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2},$$

potom dokažimo da ona vrijedi i za $n=m+1$, tj. da vrijedi jednakost:

$1+2+3+\cdots+(m+1)=\frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2}$. Zaista, $1+2+3+\cdots+m+$

$$+(m+1)=\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)=$$

$$=\frac{m(m+1)+2(m+1)}{2}=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}=$$

$$=\frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2}.$$

Dakle, možemo smatrati da smo dokazali da relacija (1) vrijedi i za svaki prirodni broj n.

94.

Koristeći se prethodnom tvrdnjom (1) dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n} 2k=n(n+1), \quad (n\in\mathbb{N}). \tag{2}$$

Rješenje.

$$\sum_{k=1}^{n} 2k=2\sum_{k=1}^{n} k=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1).$$

95.

Koristeći se prethodnom tvrdnjom (2) i znajući da je $\sum_{k=1}^{n} 1=n$ dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2.$$

Rješenje.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k-\sum_{k=1}^{n}1=n(n+1)-n=n^2.$$

96.

Dokazati da je zbir kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednak

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

Rješenje.

1) Za $n=1$ je $1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$

2) Za $n=2$ je $1^2+2^2=\frac{2(2+1)(4+1)}{6}=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{6}$.

Pretpostavimo da je jednakost (1) ispunjena za ma koji prirodni broj $n=m$, tj. da je

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}, \tag{2}$$

onda dokažimo da ona vrijedi i za $(m+1)$. To ćemo postići ako lijevoj strani jednakosti (2) dodamo broj $(m+1)^2$, što znači kvadrat sljedećeg prirodnog broja.

$$\{1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2\}+(m+1^2)=$$

$$=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2=$$

$$=\frac{m+1}{6}[m(2m+1)+6(m+1)]=\frac{m+1}{6}(2m^2+7m+6)=$$

$$=\frac{m+1}{6}\cdot 2(m+2)\left(m+\frac{3}{2}\right)=\frac{m+1}{6}\cdot 2(m+2)\cdot\frac{2m+3}{2}=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}=\frac{(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+1]}{6}.$$

Prema tome, tvrdnja (1) vrijedi i za ma koji prirodan broj n.

97.

Dokazati jednakost:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{1}$$

Rješenje.

1) Za $n=1$ je $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$

$1=1$

2) Za $n=2$ je $1^3+2^3 = \left[\frac{2(2+1)}{2}\right]^2 = \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2.$

$9=9$

Pretpostavimo da je jednakost (1) ispunjena za ma koji prirodni broj $n=m$, tj.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2, \tag{2}$$

onda dokažimo da ona vrijedi i za $n=m+1$. To ćemo postići ako lijevoj strani jednakosti (2) dodamo broj $(m+1)^3$, što znači kub sljedećeg prirodnog broja.

$$\{1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3\}+(m+1)^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2+(m+1)^3 =$$

$$= \frac{m^2(m+1)^2}{4}+(m+1)^3 = \frac{m^2(m+1)^2+4(m+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(m+1)^2}{4}[m^2+4(m+1)] = \frac{(m+1)^2}{4}\cdot(m^2+4m+4) =$$

$$= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} = \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right]^2 = \left\{\frac{(m+1)[(m+1)+1]}{2}\right\}^2.$$

Ovim smo dokazali da tvrdnja (1) vrijedi i za ma koji prirodan broj n.

98.

Dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2n^2(n+1)^2, \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Rješenje.

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 8\cdot\sum_{k=1}^{n} k^3 = 8\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 =$$

$$= 8\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2.$$

99.

Dokazati metodom matematičke indukcije da je

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{1}$$

Rješenje.

Za $n=1$ je $1\cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}.$

Za $n=2$ je $1\cdot 2+2\cdot 3 = \frac{2\cdot(2+1)(2+2)}{3} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3}.$

Pretpostavimo da je jednakost (1) ispunjena za ma koji prirodni broj $n=m$, tj.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}, \tag{2}$$

onda dokažimo da ona vrijedi i za $n=m+1$. To ćemo postići ako lijevoj strani jednakosti (2) dodamo broj $(m+1)(m+2)$, tj.:

$$\{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+m(m+1)\}+(m+1)(m+2) =$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{3}+(m+1)(m+2) = \frac{(m+1)(m+2)}{3}\cdot(m+3) =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} = \frac{(m+1)[(m+1)+1][(m+1)+2]}{3}.$$

Ovim je dokazano da relacija (1) vrijedi za bilo koji prirodni broj n.

100.

Dokazati jednakost

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}, \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{1}$$

Rješenje.

Za $n=1$ je $1\cdot 3 = \frac{1(1+1)(2+7)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 9}{6}.$

Za $n=2$ je $1\cdot 3+2\cdot 4=\frac{2(2+1)(4+7)}{6}=\frac{2\cdot 3\cdot 11}{6}$.

Pretpostavimo da jednakost (1) vrijedi i za ma koji prirodni broj $n=m$, tj.

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+m(m+2)=\frac{m(m+1)(2m+7)}{6}, \qquad (2)$$

onda dokažimo da ona vrijedi i za $n=m+1$. To ćemo postići ako lijevoj strani jednakosti (2) dodamo broj $(m+1)(m+3)$, tj.

$$\{1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+m(m+2)\}+(m+1)(m+3)=$$

$$=\frac{m(m+1)(2m+7)}{6}+(m+1)(m+3)=\frac{m+1}{6}\cdot[m(2m+7)+6(m+3)]=$$

$$=\frac{m+1}{6}[2m^2+13m+18]=\frac{m+1}{6}[2m^2+4m+9m+18]=$$

$$=\frac{m+1}{6}[2m(m+2)+9(m+2)]=\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)[(m+1)+1][2(m+1)+7]}{6}.$$

101.

Dokazati jednakost

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+1)=\frac{n(4n^2+15n+17)}{6}, \quad (n\in \mathbf{N}). \qquad (1)$$

Rješenje.

Za $n=1$ je $2\cdot 3=\frac{1\cdot(4+15+17)}{6}=\frac{36}{6}$.

Za $n=2$ je $2\cdot 3+3\cdot 5=\frac{2(16+30+17)}{6}=\frac{2\cdot 63}{6}$.

Pretpostavimo da jednakost (1) vrijedi i za ma koji prirodni broj $n=m$, tj.

$$2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7+\cdots+(m+1)(2m+1)=\frac{m(4m^2+15m+17)}{6}, \qquad (2)$$

onda dokažimo da ona vrijedi i za $n=m+1$. To ćemo postići ako lijevoj strani jednakosti (2) dodamo broj:

$$[(m+1)+1]\,[2(m+1)+1].\ \text{Zaista,}$$

$$\{2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7+\cdots+(m+1)(2m+1)\}+(m+2)(2m+3)=$$

$$=\frac{4m^3+27m^2+59m+36}{6}=\frac{4m^3+4m^2+23m^2+23m+36m+36}{6}=$$

$$=\frac{4m^2(m+1)+23m(m+1)+36(m+1)}{6}=\frac{(m+1)(4m^2+23m+36)}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)(4m^2+8m+4+15m+32)}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)[4(m^2+2m+1)+15m+15+17]}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)[4(m+1)^2+15(m+1)+17]}{6}.$$

102.

Dokazati jednakost:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k+2)=\frac{m(4n^2+15n-1)}{6}, \quad (n\in \mathbf{N}). \qquad (1)$$

Dokaz.

Za $n=1$ je $1\cdot 3=\frac{1(4+15-1)}{6}=\frac{18}{6}$.

Za $n=2$ je $1\cdot 3+3\cdot 4=\frac{2(16+30-1)}{6}$

$$15=15.$$

Pretpostavimo da jednakost (1) vrijedi i za ma koji prirodan broj $n=m$, tj.

$$1\cdot 3+3\cdot 4+5\cdot 5+\cdots+(2m-1)(m+2)=\frac{m(4m^2+15m-1)}{6}, \qquad (2)$$

4*

onda dokažimo da ona vrijedi i za $n=m+1$. To ćemo postići ako lijevoj strani jednakosti (2) dodamo broj

$$[2(m+1)-1]\cdot[(m+1)+2], \text{ tj.:}$$

$$\{1\cdot 3+3\cdot 4+5\cdot 5+\cdots+(2m-1)(m+2)\}+(2m+1)(m+3)=$$

$$=\frac{m(4m^2+15m-1)}{6}+(2m+1)(m+3)=\frac{4m^3+27m^2+41m+18}{6}=$$

$$=\frac{4m^3+4m^2+23m^2+23m+18m+18}{6}=$$

$$=\frac{4m^2(m+1)+23m(m+1)+18(m+1)}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)(4m^2+23m+18)}{6}=\frac{(m+1)(4m^2+8m+4+15m+14)}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)[4(m^2+2m+1)+15m+15-1]}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)[4(m+1)^2+15(m+1)-1]}{6}.$$

103.

Dokazati jednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}, \quad (n\in\mathbf{N}). \qquad (1)$$

Dokaz.

Za $n=1$ je $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2+1}$.

Za $n=2$ je $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{2}{4+1}$.

Pretpostavimo da jednakost (1) vrijedi i za ma koji prirodni broj $n=m$, tj.

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2m-1)(2m+1)}=\frac{m}{2m+1}, \qquad (2)$$

onda dokažimo da ona vrijedi i za $n=m+1$. To ćemo postići ako lijevoj strani jednakosti (2) dodamo broj

$$\frac{1}{[2(m+1)-1]\,[2(m+1)+1]}. \text{ Zaista,}$$

$$\left\{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2m-1)(2m+1)}\right\}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}=$$

$$=\frac{m}{2m+1}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}=\frac{m(2m+3)+1}{(2m+1)(2m+3)}=$$

$$=\frac{2m^2+3m+1}{(2m+1)(2m+3)}=\frac{(2m+1)(m+1)}{(2m+1)(2m+3)}=\frac{m+1}{2(m+1)+1}.$$

104.

Dokazati jednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}, \quad (n\in\mathbf{N}). \qquad (1)$$

Dokaz.

Za $n=1$ je $\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$.

Za $n=2$ je $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2}$.

Pretpostavimo da relacija (1) vrijedi i za $n=m$, tj.:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^m}.$$

Dokažimo da relacija (1) vrijedi i za $n=m+1$. Zaista,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{m+1}}=1-\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}=1-\frac{2-1}{2^{m+1}}=1-\frac{1}{2^{m+1}}.$$

Prema tome, tvrdnja (1) vrijedi i za bilo koji prirodan broj n.

105.

Dokazati metodom matematičke indukcije jednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=\frac{3(3^n-1)-2n}{4\cdot 3^n}, \quad (n\in\mathbf{N}).$$

Dokaz.

Za $n=1$ uslov je ispunjen jer je

$$\frac{1}{3}=\frac{3(3-1)-2}{4\cdot 3}.$$

Za $n=2$ jednakost je takođe ispunjena, tj.:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{3(9-1)-4}{4\cdot 9}.$$

Pretpostavimo da jednakost vrijedi za $n=p$, tj.:

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{k}{3^k}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{p}{3^p}=\frac{3(3^p-1)-2p}{4\cdot 3^p}.$$

Ako dokažemo da jednakost (1) vrijedi i za $n=p+1$, onda smo dokazali da ona vrijedi i za bilo koji prirodan broj n. Zaista,

$$\sum_{k=1}^{p+1}\frac{k}{3^k}=\sum_{k=1}^{p}\frac{k}{3^k}+\frac{p+1}{3^{p+1}}=\frac{3(3^p-1)-2p}{4\cdot 3^p}+\frac{p+1}{3^{p+1}}=\frac{9(3^p-1)-6p+4p+4}{4\cdot 3^{p+1}}=$$

$$=\frac{3\cdot 3\cdot 3^p-9-6p+4p+4}{4\cdot 3^{p+1}}=$$

$$=\frac{3\cdot 3^{p+1}-5-2p}{4\cdot 3^{p+1}}=\frac{3\cdot 3^{p+1}-3-2-2p}{4\cdot 3^{p+1}}=$$

$$=\frac{3(3^{p+1}-1)-2(p+1)}{4\cdot 3^{p+1}}.$$

106.

Dokazati matematičkom indukcijom jednakost:

$$\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \qquad (1)$$

Dokaz.

1) Za $n=0$ očigledno jednakost vrijedi.

2) Za $n=1$ $\sin x=\dfrac{\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\sin x$

3) Za $n=2$ je desna strana

$$\frac{\sin\frac{3}{2}x\cdot\sin x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+x\right)\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=2\sin\left(\frac{x}{2}+x\right)\cdot\cos\frac{x}{2}=$$

$$=2\left(\sin\frac{x}{2}\cos x+\sin x\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x+2\sin x\cos^2\frac{x}{2}=$$

$$=\sin x\cos x+2\sin x\cdot\cos^2\frac{x}{2}=$$

$$=\sin x\left(\cos x+2\cos^2\frac{x}{2}\right)=\sin x(\cos x+1+\cos x)=$$

$$=\sin x(2\cos x+1)=2\sin x\cos x+\sin x=$$

$=\sin x+\sin 2x$. Jednakost je tačna.

4) Pretpostavimo da relacija (1) vrijedi za $n=m$, tj. da je:

$$\sum_{k=0}^{m}\sin kx=\frac{\sin\frac{m+1}{2}x\cdot\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Ako dokažemo da relacija (1) vrijedi i za $n=m+1$, onda će ona da vrijedi i za bilo koji prirodan broj n. Zaista,

$$\sum_{k=0}^{m+1}\sin kx=\sum_{k=0}^{m}\sin kx+\sin(m+1)x=$$

$$=\frac{\sin\frac{m+1}{2}x\cdot\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\sin 2\left(\frac{m+1}{2}\right)x=$$

$$=\frac{\sin\frac{m+1}{2}x\cdot\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+2\sin\frac{m+1}{2}x\cos\frac{m+1}{2}x=$$

$$=\frac{\sin\frac{m+1}{2}x\cdot\sin\frac{mx}{2}+2\sin\frac{m+1}{2}x\cdot\cos\frac{m+1}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{m+1}{2}x\cdot\left(\sin\frac{mx}{2}+2\cos\frac{m+1}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=$$

Na osnovu obrasca $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\alpha-\sin\beta$ imamo da je:

$$2\cos\frac{m+1}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}=\sin\alpha-\sin\beta,\ \text{gdje je:}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta}{2}&=\frac{m+1}{2}x\\ \frac{\alpha-\beta}{2}&=\frac{x}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Ako saberemo relacije (2) dobićemo:

$$\frac{2\alpha}{2}=\frac{m+2}{2}x\ \rightarrow\ \alpha=\frac{m+2}{2}x.$$

Ako pak oduzmemo relacije (2) dobiće se:

$$\frac{2\beta}{2}=\frac{mx}{2}\ \rightarrow\ \beta=\frac{mx}{2}.$$

Ako sada uvrstimo dobijene vrijednosti za α i β dobijamo da je:

$$2\cos\frac{m+1}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{m+2}{2}x-\sin\frac{mx}{2},\ \text{pa je:}$$

$$=\frac{\sin\frac{m+1}{2}x\cdot\left(\sin\frac{mx}{2}+\sin\frac{m+2}{2}x-\sin\frac{mx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{m+2}{2}x\cdot\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

107.

Metodom matematičke indukcije dokazati

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},\qquad(n\in\mathbb{N})$$

Dokaz.

Za $n=1$ jednakost je zadovoljena, tj. desna strana je:

$$\frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}\cos x+\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}\cos x+2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos x+2\cos^2\frac{x}{2}}{2}=$$

$$=\frac{\cos x+1+\cos x}{2}=\frac{2\cos x+1}{2}=\frac{1}{2}+\cos x.$$

Pretpostavimo da je relacija (1) ispunjena za $n=m$, tj.:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\cos kx=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Dokažimo da relacija (1) vrijedi i za $n=m+1$, tj.:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m+1}\cos kx=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(m+1)x=$$

$$=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}x+2\cos(m+1)x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{(2m+2)-1}{2}x+2\cos(m+1)x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left[(m+1)x-\frac{x}{2}\right]+2\cos(m+1)x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin(m+1)x\cdot\cos\frac{x}{2}-\cos(m+1)x\cdot\sin\frac{x}{2}+2\cos(m+1)x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin(m+1)x\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos(m+1)x\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left[(m+1)+\frac{1}{2}\right]x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2m+2+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{2m+3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{2(m+1)+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

108.

Dokazati da nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{n},\quad (n\in\mathbf{N}) \tag{1}$$

vrijedi za svaki prirodan broj $n\geqslant 2$.

Dokaz. Za $n=2$ dobijamo da je:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}+1>2\Leftrightarrow\sqrt{2}>1\Leftrightarrow 2>1.$$

Za $n=3$ uslov je takođe ispunjen, tj.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}>\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{6}+\sqrt{3}>2\sqrt{2}\Leftrightarrow 6\sqrt{2}>-1.$$

Pretpostavimo da nejednakost (1) vrijedi za $n=m$, tj. da je:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{m}.$$

Ako dokažemo da relacija (1) vrijedi za $n=m+1$, onda će ona da vrijedi i za svaki prirodni broj n. Zaista,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}=\sqrt{m+1}\left(\sqrt{\frac{m}{m+1}}+\frac{1}{m+1}\right)=$$

$$=\sqrt{m+1}\left(\frac{\sqrt{m(m+1)}}{m+1}+\frac{1}{m+1}\right)=\sqrt{m+1}\left(\frac{\sqrt{m^2+m}+1}{m+1}\right)>\sqrt{m+1}\cdot\frac{m+1}{m+1}=$$

$$=\sqrt{m+1}.$$

Prema tome, ako je $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{m}$, onda je tim prije i $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{m+1}$,

što znači da je metodom matematičke indukcije izveden dokaz.

Napomena: Dokaz smo mogli i ovako provesti:

1) Za $n=2$ imamo:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\frac{1+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

2) Pretpostavimo da je za $n=k+1$ relacija ispunjena, tj.:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}.$$

Dokažimo valjanost tvrdnje i za $n=k+2$, tj.: da vrijedi:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}>\sqrt{k+2}.$$

Zaista,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+2}}=$$

$$\frac{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+2}+1}{\sqrt{k+2}}>\frac{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+2}+1}{\sqrt{k+2}}=\frac{k+1+1}{\sqrt{k+2}}=\frac{k+2}{\sqrt{k+2}}=\sqrt{k+2}.$$

Ovim je dokaz završen.

109.

Dokazati identitet

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}. \tag{1}$$

Dokaz. Za $n=2$ relacija (1) vrijedi, jer je:

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2^2+2+1}{2\cdot(2+1)}$$

$$\frac{7}{9}=\frac{7}{9}.$$

Pretpostavimo da relacija (1) vrijedi i za bilo koje $n=m\geqslant 2$, tj.:

$$\prod_{k=2}^{m}\frac{k^3-1}{k^2+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{m^2+m+1}{m(m+1)}.$$

Ako dokažemo da identitet (1) vrijedi i za $n=m+1$, onda će on vrijediti i za bilo koji prirodan broj $n\geqslant 2$.

$$\prod_{k=2}^{m+1}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{m^2+m+1}{m(m+1)}\cdot\frac{(m+1)3-1}{(m+1)3+1}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{m^2+m+1}{m(m+1)}\cdot\frac{[(m+1)-1]\,[(m+1)^2+(m+1)+1]}{[(m+1)+1]\,[(m+1)^2-(m+1)+1]}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{m^2+m+1}{m(m+1)}\cdot\frac{m\,[(m+1)^2+(m+1)+1]}{[(m+1)+1]\,(m^2+m+1)}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{(m+1)^2+(m+1)+1}{(m+1)\,[(m+1)+1]}.$$

110.

Metodom matematičke indukcije dokazati nejednakost

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}. \qquad (1)$$

Dokaz. Za $n=1$ nejednakost je ispunjena jer je:

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Za $n=2$ uslov je takođe ispunjen, tj.:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\leqslant\frac{1}{\sqrt{6+1}}$$

$$\frac{3}{8}\leqslant\frac{1}{\sqrt{7}}\Leftrightarrow 3\sqrt{7}\leqslant 8\Leftrightarrow 63\leqslant 64.$$

Pretpostavimo da relacija (1) važi za $n=m$, tj. da je:

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3m+1}}.$$

Pomnožimo li lijevu i desnu stranu posljednje relacije pozitivnim brojem $\frac{2(m+1)-1}{2(m+1)}$, dobijamo:

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2(m+1)-1}{2(m+1)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3m+1}}\cdot\frac{2(m+1)-1}{2(m+1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{3m+1}}\cdot\frac{2m+1}{2m+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3(m+1)+1}}. \qquad (2)$$

Pretpostavimo da relacija (2) nije istinita, tj. da je:

$$\frac{2m+1}{(2m+2)\sqrt{3m+1}}>\frac{1}{\sqrt{3(m+1)+1}}.$$

Poslije kvadriranja lijeve i desne strane dobijamo da je:

$$\frac{(2m+1)^2}{(2m+2)^2\cdot(3m+1)}>\frac{1}{3m+4}$$

$$(2m+1)^2(3m+4)>(2m+2)^2(3m+1)$$

$$(4m^2+4m+1)(3m+4)>(4m^2+8m+4)(3m+1)$$

$$19m>20m,$$

što nije tačno za $m\geqslant 0$. Prema tome, relacija (2) je istinita, pa je relacija (1) dokazana.

111.

Dokazati metodom matematičke indukcije nejednakost

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\quad(n\geqslant 2). \qquad (1)$$

Dokaz. Za $n=2$ nejednakost vrijedi, tj.:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}+1>2\Leftrightarrow\sqrt{2}>1\Leftrightarrow 2>1.$$

Pretpostavimo da nejednakost (1) vrijedi za $n=k$, tj. da je:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}. \qquad (2)$$

Dokažimo da relacija (1) vrijedi i za $n=k+1$, onda će ona vrijediti i za bilo koji $n\in\mathbf{N}$. U tu svrhu dodajmo lijevoj i desnoj strani relacije (2) pozitivan broj $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, tj.:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \qquad (3)$$

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}.$$

Pretpostavimo da relacija (3) nije tačna za $k\geqslant 2$, nego da je:

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqslant\sqrt{k+1}. \qquad (4)$$

Kvadriramo li lijevu i desnu stranu posljednje relacije, dobija se:

$$k+\frac{1}{k+1}+2\sqrt{\frac{k}{k+1}}\leqslant k+1$$

$$2\sqrt{\frac{k}{k+1}}\leqslant 1-\frac{1}{k+1}, \text{ tj. } 2\sqrt{\frac{k}{k+1}}\leqslant\frac{k}{k+1}, \text{ tj.}$$

$$\frac{4k}{k+1}\leqslant\frac{k^2}{(k+1)^2}, \text{ tj. } 4\leqslant\frac{k}{k+1}, \text{ tj. } 3k+4\leqslant 0.$$

Budući da nas je pretpostavka (4) dovela do besmislice, relacija (3) je tačna, pa relacija (1) vrijedi za proizvoljan prirodan broj $n\geqslant 2$.

112.

Dokazati metodom matematičke ndukcije nejednakost

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\,(\sqrt{n+1}-1), \quad (n\in\mathbf{N}). \qquad (1)$$

Dokaz. Za $n=1$ nejednakost (1) očigledno vrijedi. Pretpostavimo istinitost nejednakosti (1) za $n=k$, naime, pretpostavimo da je:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>2\,(\sqrt{k+1}-1).$$

Tada je

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\,(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Ako još pokažemo da je

$$2\,(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\,(\sqrt{k+2}-1) \quad (k\geqslant 1), \qquad (2)$$

tada smo dokazali važenje nejednakosti (1) za svako n iz skupa prirodnih brojeva.

Ako se oslobodimo zagrada, relacija (2) će da glasi:

$$2\sqrt{k+1}-2+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\sqrt{k+2}-2,$$

tj.

$$2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\sqrt{k+2}. \qquad (3)$$

Pretpostavimo da relacija (3) nije tačna za $k\geqslant 1$, već da je:

$$2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqslant 2\sqrt{k+2} \qquad (4)$$

tj.

$$2k+3\leqslant 2\sqrt{(k+1)(k+2)}.$$

Ako kvadriramo posljednju relaciju i svedemo je, dobiće se da je:

$$9\leqslant 8.$$

Budući da je pretpostavka (4) dovela do apsurda, proizilazi da nejednakost (2) vrijedi za $k\geqslant 1$. Prema izloženom, slijedi da nejednakost (1) vrijedi za svako $n\in\mathbf{N}$.

113.

Primjenom metode matematičke indukcije dokazati jednakost

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}. \qquad (1)$$

Dokaz. Za $n=1$ jednakost (1) je ispunjena, tj.:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 5}.$$

Pretpostavimo da je jednakost (1) ispunjena za $n=k\geqslant 1$, tj.:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

i dokažimo da vrijedi za $n=k+1$, tj.:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}+$$

$$+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}+$$

$$+\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)}\cdot\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2k+5}\right)=$$

$$=\frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)}\cdot\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+5)}=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)(2k+5)}.$$

Prema tome, jednakost (1) vrijedi i za bilo koji prirodni broj $n\in\mathbf{N}$.

114.

Metodom matematičke indukcije dokazati jednakost

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}. \qquad (1)$$

Dokaz. Za $n=1$ jednakost je istinita, tj.:

$$\frac{x}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x(1-x)}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}.$$

Pretpostavimo da je jednakost ispunjena za $n=k\geqslant 1$, tj.:

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^k}}{1-x^{2^k}}.$$

Dokažimo da jednakost (1) vrijedi i za $n=k+1$, tj.:

$$\left\{\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{k-1}}}{1-2^{2^k}}\right\}+\frac{x^{2^{(k+1)-1}}}{1-x^{2^{k+1}}}=$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^k}}{1-x^{2^k}}+\frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

Radi kraćeg pisanja uvedimo smjenu $2^k=m$. Imaćemo:

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^m}{1-x^m}+\frac{x^m}{1-x^{2m}}=\frac{1}{(1-x)(1-x^{2m})}(x-x^m)(1+x^m)+x^m(1-x)]=$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^{2m})}\cdot(x-x^m+x^{m+1}-x^{2m}+x^m-x^{m+1})=$$

$$=\frac{x-x^{2m}}{(1-x)(1-x^{2m})}=\frac{x-x^{2^{k+1}}}{(1-x)(1-x^{2^{k+1}})}.$$

115.

Metodom matematičke indukcije dokazati jednakost

$$\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\cdots+\frac{1}{\cos nx\cos(n+1)x}=\frac{\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg}x}{\sin x}.$$

Dokaz. Za $n=1$ jednakost je zadovoljena jer je:

$$\frac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{\sin x}=\frac{\sin(2x-x)}{\sin x\cos x\cos 2x}=\frac{\sin x}{\sin x\cos x\cos 2x}=\frac{1}{\cos x\cos 2x}.$$

Pretpostavimo sada, da je data jednakost ispunjena za $n=k-1$, tj.

$$\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\cdots+\frac{1}{\cos(k-1)x\cos kx}=\frac{\operatorname{tg}kx-\operatorname{tg}x}{\sin x}. \qquad (1)$$

Napomena: U prethodnoj pretpostavci uzeli smo da je $n=k-1$, a ne $n=k$ iz praktičnih razloga. To se veoma često čini u matematičkoj indukciji jer umnogome uprošćuje rad.

Dokažimo da relacija (1) vrijedi i za $n=k\geqslant 2$, tj.:

$$\left\{\frac{1}{\cos x\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\cdots+\frac{1}{\cos(k-1)x\cos kx}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x}=\frac{\operatorname{tg}kx-\operatorname{tg}x}{\sin x}+\frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x}=$$

$$=\frac{\sin(kx-x)}{\sin x\cos kx\cos x}+\frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x}=$$

$$=\frac{\sin(k-1)x\cos(k+1)x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x\cos kx\cos(k+1)x}=$$

$$=\frac{\sin 2kx-\sin 2x+\sin 2x}{2\sin x\cos x\cos kx\cos(k+1)x}=\frac{\sin[(k+1)-1]x}{\sin x\cos x\cos(k+1)x}=$$

$$=\frac{\sin(k+1)x\cos x-\cos(k+1)x\sin x}{\sin x\cos x\cos(k+1)x}=\frac{\operatorname{tg}(k+1)x-\operatorname{tg}x}{\sin x}.$$

116.

Metodom matematičke indukcije dokazati jednakost

$$\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-2\operatorname{ctg}2x, \qquad (1)$$

$(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$.

Dokaz. Kratkoće radi označimo lijevu stranu jednakosti (1) sa S_n.

Za $n=0$ jednakost je zadovoljena, tj.:

$$S_0=\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}=\frac{1-1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}=\frac{1}{\operatorname{tg} x}-2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}=\operatorname{ctg} x-2\operatorname{ctg}2x$$

Za $n=1$ jednakost je takođe zadovoljena. Zaista,

$$S_1=\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1-\cos x}{2\sin x}=\frac{2\sin^2 x+\cos x-\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+2\sin^2 x-2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{\cos x\cdot(1+\cos x)-2\cos 2x}{2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{\cos x\,(1+\cos x)}{2\sin x\cos x}-\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1+\cos x}{2\sin x}-2\operatorname{ctg}2x=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-2\operatorname{ctg}2x.$$

Pretpostavimo da je jednakost zadovoljena i za $n=k-1\geqslant 0$ i dokažimo da je ona zadovoljena i za $n=k$. Zaista,

$$S_k=S_{k-1}+\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}}-2\operatorname{ctg}2x+\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=$$

$$=\frac{1}{2^k}\left(2\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}}+\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}\right)-2\operatorname{ctg}2x.$$

Radi kratkoće pisanja uvedimo smjenu $\frac{x}{2^k}=\alpha$, pri čemu će izraz u zagradi poprimiti oblik:

$$2\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}2\alpha+(\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{ctg}2\alpha+$$

$$+\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}=\operatorname{ctg}2\alpha+$$

$$+\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}.$$

Prema tome je

$$S_k=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-2\operatorname{ctg}2x.$$

Ovim je jednakost (1) dokazana.

117.

Za $a>b>0$ i $n\in\mathbf{N}$ dokazati da je:

$$a^n>b^n. \qquad (1)$$

Dokaz. Za $n=1$ relacija vrijedi jer je po pretpostavci zadatka $a>b$. Pretpostavimo da relacija (1) vrijedi i za $n=k\geqslant 1$, tj.

$$a^k>b^k. \qquad (2)$$

Kako je: $a>0$, relacija (2) poslije množenja sa a, postaje:

$$a^{k+1}>ab^k.$$

Budući da je $a>b$, posljednja relacija dobija oblik

$$a^{k+1}>ab^k>b^{k+1}.$$

Prema tome, relacija (1) je tačna za svaki prirodni broj n.

118.

Za koje prirodne brojeve n je zadovoljena nejednakost

$$2^n>5n?$$

Rješenje. Za $n=1, 2, 3, 4$ nejednakost nije ispunjena.

Za $n=5$ ona je ispunjena, tj.

$$2^5>5\cdot 5.$$

Pretpostavimo da je nejednakost zadovoljena za $n=k\geqslant 5$, tj.

$$2^k>5k.$$

Dokažimo da je ona tada zadovoljena i za $n=k+1$

$$2^{k+1}>5(k+1).$$

Zaista,

$$2^{k+1}=2^k\cdot 2>5k\cdot 2=10k=5k+5k,$$

i pošto je $5k>5$ za $k>1$, to je:

$$2^{k+1}>5k+5, \text{ tj.}$$

$$2^{k+1}>5(k+1).$$

Dakle, nejednakost $2^n>5n$ je tačna za svaki prirodan broj $n\geqslant 5$.

119.

Metodom matematičke indukcije dokazati nejednakost

$$2^n>n^2, \quad \text{za } n\geqslant 5.$$

Dokaz.

1) Za $n=5$ nejednakost je istinita jer je $2^5>5^2$.

2) Pretpostavimo da je nejednakost ispunjena i za $n=k+4$, $(k\in \mathbf{N})$

$$2^{k+4}>(k+4)^2=k^2+8k+16.$$

Dokažimo da je i za $n=k+5$

$$2^{k+5}>(k+5)^2=k^2+10k+25.$$

Zaista,

$$2^{k+5}=2^{k+4}\cdot 2>(k^2+8k+16)\cdot 2=2k^2+16k+32>k^2+10k+25.$$

Time je dokaz završen.

120.

Metodom matematičke indukcije dokazati da za $n\geqslant 10$ vrijedi nejednakost

$$2^n>n^3.$$

Dokaz.

1) Za $n=10$ imamo da je nejednakost zadovoljena jer je $2^{10}>10^3$.

2) Pretpostavimo da je ona ispunjena i za $n=k+9$, $k\in \mathbf{N}$, tj. da je:

$$2^{k+9}>(k+9)^3=k^3+27k^2+243k+729.$$

Dokažimo da je ona ispunjena i za $n=k+10$, tj. da je:

$$2^{k+10}>(k+10)^3=k^3+30k^2+300k+1000.$$

Zaista,

$$2^{k+10}=2^{k+9}\cdot 2=(k^3+27k^2+243k+279)\cdot 2=$$

$$=2k^3+54k^2+486k+1458>k^3+30k^2+300k+1000.$$

Time je dokaz završen.

121.

Dokazati metodom matematičke indukcije da je broj

$$f(n)=2^{2n}-3n-1$$

djeljiv sa 9, za svako $n\geqslant 2$ i $n\in \mathbf{N}$.

Dokaz. Za $n=2$ broj $f(2)=2^4-6-1=9$ je djeljiv sa 9.

Za $n=3$ broj $f(3)=2^6-9-1=54$ je takođe djeljiv sa 9.

Pretpostavimo da je dati broj djeljiv sa 9 i za $n=m$, $(2\leqslant m\in \mathbf{N})$ onda je on djeljiv i za $n=m+1$, tj.

$$f(m+1)=2^{2(m+1)}-3(m+1)-1=2^{2m+2}+3m-3-1=4\cdot 2^{2m}-3m-4=$$

$$=4(2^{2m}-3m-1)+12m-3m=4f(m)+9m.$$

Pošto je broj $4f(m)$ po pretpostavci djeljiv sa 9 i pošto je broj $9m$ djeljiv sa 9, biće i njihov zbir djeljiv sa 9, a njihov zbir je $f(m+1)$.

122.

Dokazati metodom matematičke indukcije da je broj

$$3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}, \text{ gdje je } n\in \mathbf{N}, \text{ djeljiv sa } 17.$$

Dokaz. Označimo li dati broj sa $f(n)$, tj.

$$f(n)=3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1},$$

onda za $n=1$ imamo da je

$f(1)=3\cdot 5^3+2^4=3\cdot 125+16=375+16=391=17\cdot 23$, tj. $f(1)$ je djeljiv sa 17.

Pretpostavimo da je za $n=k$, $f(k)$ djeljivo sa 17 i dokažimo da je i $f(k+1)$ takođe djeljiv sa 17.

Zaista,

$$f(k+1)=3\cdot 5^{2k+3}+2^{3k+4}=3\cdot 5^{2k+1}\cdot 5^2+2^{3k+1}\cdot 2^3=$$

$$=25\cdot 3\cdot 5^{2k+1}+8\cdot 2^{3k+1}=3(8+17)\cdot 5^{2k+1}+8\cdot 2^{3k+1}=$$

$$=8\cdot 3\cdot 5^{2k+1}+8\cdot 2^{3k+1}+3\cdot 17\cdot 5^{2k+1}=$$

$$=8(3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1})+3\cdot 17\cdot 5^{2k+1}=$$

$$=8f(k)+3\cdot 17\cdot 5^{2k+1}.$$

Pošto je $f(k)$ po pretpostavci djeljiv sa 17, onda je i $8f(k)$ djeljiv sa 17. Pošto je u dobijenom rezultatu i drugi sabirak djeljiv sa 17, to je $f(k+1)$ djeljiv sa 17. Time je tvrdnja dokazana.

123.

U brojnom nizu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... svaki broj tog niza, počev od trećeg, jednak je zbiru dva prethodna člana. Dokazati metodom matematičke indukcije, da je svaki četvrti član tog niza, tj. član koji se nalazi na četvrtom, osmom, dvanaestom itd. mjestu djeljiv sa 3.

Dokaz. Ako označimo niz četvrtih članova sa:

$$f(4), f(8), f(12), f(16), \ldots, f(4n), \ldots,$$

onda treba da dokažemo da je za bilo koji $n \in \mathbf{N}$ broj $f(4n)$ djeljiv sa 3.

Pošto je $f(4)=3$, to je tvrdnja za $n=1$ ispunjena.

Pretpostavimo da je tvrdnja takođe ispunjena i za $n=k \geqslant 1$, tj. da je broj $f(4k)$ djeljiv sa 3. Ako bismo dokazali da je i broj $f(4k+4)$ takođe djeljiv sa 3, onda bi prednja tvrdnja vrijedila i za bilo koje n. U tu svrhu poslužićemo se osobinom datog niza da je svaki njegov član $f(m)$, $(m \geqslant 3)$ vezan sa svoja dva prethodna člana relacijom:

$$f(m)=f(m-1)+f(m-2).$$

Tada dobijamo

$$f(4k+4)=f(4k+3)+f(4k+2)=[f(4k+2)+f(4k+1)]+$$
$$+f(4k+2)=2f(4k+2)+f(4k+1)=2[f(4k+1)+f(4k)]+$$
$$+f(4k+1)=3f(4k+1)+2f(4k).$$

Dakle, dobili smo da je

$$f(4k+4)=3f(4k+1)+2f(4k).$$

Kao što vidimo, oba sabirka na desnoj strani prednje jednakosti djeljivi su sa 3. Prvi je djeljiv jer ima za faktor 3, a drugi zato što ima faktor $f(4k)$, koji je po pretpostavci djeljiv sa 3. Prema tome je i njihov zbir $f(4k+4)$ djeljiv sa 3, pa je tvrdnja dokazana.

124.

Dokazati metodom matematičke indukcije da je a^n-1 djeljivo sa $a-1$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz. Za $n=1$ slijedi $(a-1):(a-1)=1$.

Za $n=2$ slijedi $(a^2-1):(a-1)=(a-1)(a+1):(a-1)=a+1$.

Za $n=3$ takođe imamo da je:

$$(a^3-1):(a-1)=(a-1)(a^2+a+1):(a-1)=a^2+a+1.$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $n=k \geqslant 1$ i da je:

$$(a^k-1):(a-1)=a^{k-1}+a^{k-2}+a^{k-3}+\cdots+1.$$

Onda dokažimo da je to tačno i za $n=k+1$.

$$(a^{k+1}-1):(a-1)=(a^{k+1}-a^k+a^k-1):(a-1)=$$
$$=[a^k(a-1)+(a^k-1)]:(a-1)=a^k+(a^k-1):(a-1)=$$
$$=a^k+a^{k-1}+a^{k-2}+a^{k-3}+\cdots+1$$

jer je drugi sabirak (a^k-1) po pretpostavci djeljiv sa $a-1$

125.

Ako je n prirodan broj, dokazati da je a^n-b^n djeljiv sa $a-b$.

Dokaz. Za $n=1$ je $(a-b):(a-b)=1$.

Za $n=2$ je $(a^2-b^2):(a-b)=(a-b)(a+b):(a-b)=a+b$.

Za $n=3$ takođe vrijedi jer je:

$$(a^3-b^3):(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2):(a-b)=a^2+ab+b^2.$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $n=k \geqslant 1$ i da je:

$$(a^k-b^k):(a-b)=a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+a^{k-4}b^3+\cdots+b^{k-1}.$$

Dokažimo da je tvrdnja tačna i za $n=k+1$, tj. da je:

$$(a^{k+1}-b^{k+1}):(a-b)=(a^{k+1}-a^kb+a^kb-b^{k+1}):(a-b)=$$
$$=[a^k(a-b)+b(a^k-b^k)]:(a-b)=$$
$$=a^k+b(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+a^{k-4}b^3+$$
$$+\cdots+b^{k-1})=$$
$$=a^k+a^{k-1}b+a^{k-2}b^2+a^{k-3}b^3+a^{k-4}b^4+\cdots+b^k.$$

126.

Dokazati da je $a^{2n}-1$ djeljiv sa a^2-1 za svako $n \in \mathbf{N}$.

Dokaz.

Za $n=1$ je $(a^2-1):(a^2-1)=1$.

Za $n=2$ je $(a^4-1):(a^2-1)=(a^2-1)(a^2+1):(a^2-1)=a^2+1$.

Za $n=3$ takođe je djeljivo jer je:

$$(a^6-1):(a^2-1)=[(a^2)^3-1]:(a^2-1)=[(a^2-1)(a^4+a^2+1)]:(a^2-1)=a^4+a^2+1.$$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $n=k \geqslant 1$ i da je:

$$(a^{2k}-1):(a^2-1)=a^{2k-2}+a^{2k-4}+\cdots+1.$$

Dokažimo da to vrijedi i za $n=k+1$. Zaista,

$$(a^{2(k+1)}-1):(a^2-1)=(a^{2k+2}-1):(a^2-1)=$$
$$=(a^{2k+2}-a^{2k}+a^{2k}-1):(a^2-1)=$$
$$=[a^{2k}(a^2-1)+(a^{2k}-1)]:(a^2-1)=$$
$$=a^{2k}+(a^{2k}-1):(a^2-1)=$$
$$=a^{2k}+a^{2k-2}+a^{2k-4}+\dots+1.$$

Napomena: Za $a^2=c$ zadatak se svodi na zadatak 34.

2.1. **Zadaci za samostalan rad**

Metodom matematičke indukcije dokazati da je:

127.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

128.

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)=\frac{n}{6}(2n^2+9n+1).$$

129.

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1)n^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\cdot 3\cdot 4}.$$

130.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

131.

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

132.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{3^{k-1}}=\frac{3^n(2n-1)+1}{2\cdot 3^{n-1}}.$$

133.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k-1}+1}{2^k}=\frac{2^{2n}-1}{2^n}.$$

134.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2^{k+1}}{2}=\frac{n(n+1)+8(2^n-1)}{4}.$$

135.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+2k+1}{k(k+1)}=\frac{n(2n+3)}{n+1}.$$

136.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

137.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

138.

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(\alpha+k\beta)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

139.

$$\cos x+\cos 3x+\dots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

140.

Dokazati da je broj $f(n)=5^n+2^{n+1}$ djeljiv sa 3 za $n=0, 1, 2, \dots$

141.

Dokazati da je broj $2^{12n+3}-3^{6n+2}$, gdje je $n=0, 1, 2, \dots$ djeljiv sa 13.

142.

Dokazati da je zbir kubova tri uzastopna prirodna broja djeljiv sa 9.

143.

Dokazati u sljedećim zadacima, da ako je $n\in\mathbf{N}$, da je broj a djeljiv brojem b.

1) $a=3^{4n+2}+1$, $b=10$
2) $a=2^{8n+6}+1$, $b=5$
3) $a=7^{2n}-4^{2n}$, $b=33$
4) $a=5^{2n+3}+3^{n+3}\cdot 2^n$, $b=19$.

144.

Dokazati: ako je n cijeli broj, to je broj a djeljiv brojem b.

1) $a = n^3 + 11n$, $b = 6$

2) $a = n^3 + 20n$, $b = 48$ (n paran)

3) $a = n^5 - 5n^3 + 4n$, $b = 120$.

145.

Dokazati da je polinom $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ djeljiv sa $x^2 - 2x + 1$.

146.

Metodom matematičke indukcije dokazati da je za svako $n \in \mathbf{N}$:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{n}{n(n+4)}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$.

d) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

e) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

f) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1) = (n+1)^2$.

g) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$.

h) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

147.

Dokazati da za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$ je

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1} < \frac{3}{2}.$$

148.

Dokazati da je za $n \geqslant 2$ zadovoljena nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Rješenje. Za bilo koji prirodni broj k vrijedi

$$\frac{1}{3k^2} > \frac{1}{4k^2-1} = \frac{k}{2k+1} - \frac{k-1}{2k-1}.$$

Prema tome biće

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k^2} > \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2k+1} - \frac{k-1}{2k-1} \right) = \left(\frac{1}{3} - 0 \right) +$$

$$+ \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

Odavde dobijamo da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

Zadatak riješiti i metodom matematičke indukcije.

149.

Dokazati da je za svaki $n \in \mathbf{N}$:

a) $6^{2n-1} + 1$	djeljiva sa	7
b) $4^n + 15n - 1$	„ „	9
c) $10^n + 18n - 28$	„ „	27
d) $9^{n+1} - 8n - 9$	„ „	16
e) $3^{2n+2} - 8n - 9$	„ „	64
f) $4 \cdot 6^n + 5n - 4$	„ „	25
g) $6^{2n} + 19^n - 2^{n-1}$	„ „	17

150.

Za koje vrijednosti broja n je broj

$[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n]$ djeljiv sa

$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$?

Rješenje. Pošto je za svaki k, $(k-1) \cdot k = k^2 - k$, to je:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n = (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) -$$

$$-(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}.$$

Količnik $\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}:\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2(n-1)}{3}$ je cio broj, ako je $n-1$ djeljivo sa 3, tj. $n=3t+1$, gdje je $t=0, 1, 2, \ldots$.

151.

Metodom matematičke indukcije dokazati

a) $\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$,

b) $\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{3}$.

3. BINOMNI OBRAZAC

3.1 **Funkcija** $n\mapsto n!$

Funkcija $n\mapsto n!$ definiše se kao proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do n u oznaci $n!$ i čita se „n faktorijel".

Dakle,

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n. \qquad (1)$$

Takođe se definiše da je

$$0!=1 \quad \text{i} \quad 1!=1. \qquad (2)$$

Na primjer:

$$3!=1\cdot 2\cdot 3=6$$

$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=3!\cdot 4=6\cdot 4=24$$

$$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=4!\cdot 5=24\cdot 5=120$$

$$6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=5!\cdot 6=120\cdot 6=720$$

$$7!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=6!\cdot 7=720\cdot 7=5040$$

$$8!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=7!\cdot 8=5040\cdot 8=40320$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n!=(n-1)!\,n. \qquad (3)$$

Proizvod prvih n parnih prirodnih brojeva $2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)$ označavamo sa:

$$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)(2n). \qquad (4)$$

Takođe se definiše da je za $n=0, 1, 2, 3, \ldots$

$$0!!=1,\ 1!!=1,\ (n+2)!!=n!!\,(n+2). \qquad (5)$$

Analogno prednjoj definiciji, definiše se proizvod svih neparnih prirodnih brojeva:

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)(2n-1). \qquad (6)$$

Simbol $(2n)!!$ treba razlikovati od simbola $[(2n)!]!$ koji znači

$$[(2n)!]! = [1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\,n\,(n+1)\cdot \ldots \cdot (2n)]!.$$

Tako je, na primjer:

$$2!! = 2$$
$$4!! = 2\cdot 4 = 2!!\cdot 4 = 8$$
$$6!! = 2\cdot 4\cdot 6 = 4!!\cdot 6 = 48$$
$$8!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 = 6!!\cdot 8 = 384$$
$$10!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10 = 8!!\cdot 10 = 3840$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(2n)!! = (2n-2)!!\,(2n), \qquad (7)$$

odnosno:

$$1!! = 1$$
$$3!! = 1\cdot 3 = 1!!\cdot 3 = 3$$
$$5!! = 1\cdot 3\cdot 5 = 3!!\cdot 5 = 15$$
$$7!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 5!!\cdot 7 = 105$$
$$9!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9 = 7!!\cdot 9 = 945$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(2n-1)!! = (2n-3)!!\,(2n-1). \qquad (8)$$

152.

Metodom matematičke indukcije dokazati da je za $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$(2n)!! = n!\,2^n. \qquad (10)$$

Dokaz. Za $n = 0$ tvrdnja je tačna jer je $0!! = 0!\,2^0$. Pretpostavimo da je (10) tačno za neko proizvoljno $n \geqslant 0$, onda dokažimo da ona vrijedi i za $(n+1)$. Zaista je:

$$[2(n+1)]!! = (2n+2)!! = (2n)!!\,(2n+2) = n!\,2^n\,(2n+2) =$$
$$= n!\,(n+1)\,2^{n+1} = (n+1)!\,2^{n+1}.$$

Ovim je induktivni dokaz završen.

153.

Pokaži da je $\dfrac{(n+1)!}{n} = (n-1)!\,(n+1).$

Rješenje. $\dfrac{(n+1)!}{n} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\,n\,(n+1)}{n} =$

$$= [1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)]\,(n+1) = (n-1)!\,(n+1).$$

154.

$$\frac{n!}{n(n-1)} = (n-2)!$$

Rješenje. $\dfrac{n!}{n(n-1)} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\,n}{n(n-1)} =$

$$= 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2) = (n-2)!$$

155.

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1).$$

Rješenje. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n-1)!\,n\,(n+1)}{(n-1)!} = n(n+1).$

156.

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = 2n(2n+1).$$

Rješenje. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \dfrac{(2n-1)!\;2n(2n+1)}{(2n-1)!} = 2n(2n+1).$

157.

$$\frac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot 2n.$$

Rješenje. $\dfrac{(2n)!}{n!} = \dfrac{n!\,(n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot 2n}{n!} =$

$$= (n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot 2n.$$

158.

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1).$$

Rješenje. $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)!\,(n-1)\,n}{(n-2)!} = n(n-1).$

159.

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}\,.$$

Rješenje. $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}\,.$

160.

Dokazati da je $\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$ $(n\in\mathbf{N})$ prirodan broj.

Rješenje. Brojevi $\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$ i $\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-2)!}$, $(n=2, 3, \ldots)$ su binomni koeficijenti i prema tome prirodni brojevi. Budući da je:

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-2)!}=\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}\,,$$

konstatujemo da je $\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$ prirodan broj jer on je razlika dva binomna koeficijenta koji su prirodni brojevi. Za $n=1$ dati izraz je jednak 1.

161.

Dokazati nejednakost $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$

Rješenje. Ako lijevu stranu nejednakosti označimo sa N, onda imamo:

$$N=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}<$$

| iz relacije $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$, $(k\in\mathbf{N})$ slijedi da je | $<$

$$<\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}=\frac{1}{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}}=$$

$$=\frac{1}{2nN}<\frac{1}{nN}$$

Dakle, $N<\frac{1}{nN}$

$$N^2<\frac{1}{n}$$

$$N<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

tj. $$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

162.

Dokazati da je $\sum_{k=1}^{n} k!\,k\equiv(n+1)!-1.$

Rješenje. $\sum_{k=1}^{n} k!\,k\equiv\sum_{k=1}^{n} k!\,[(k+1)-1]\equiv\sum_{k=1}^{n} k!\,(k+1)-\sum_{k=1}^{n} k!\equiv$

$\equiv 2!+3!+4!+\cdots+n!+(n+1)!-(1!+2!+3!+4!+\cdots+n!)\equiv$

$\equiv 2!+3!+4!+\cdots+n!+(n+1)!-1!-2!-3!-4!-\cdots-n!\equiv$

$\equiv(n+1)!-1.$

3.2. Funkcija $(n, k)\mapsto\binom{n}{k}$

Ako su n i k nenegativni cijeli brojevi, funkcija $(n, k)\mapsto\binom{n}{k}$ definiše se sa

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{k}=\frac{n.(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!}\qquad(k\in\mathbf{N})$$

i čita se „n nad k“.

Na osnovu ove definicije je $\binom{n}{k}=0$, ako je $n<k$ (n i k prirodni brojevi) jer je tada

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots2\cdot1\cdot0\ldots(n-k+1)}{k!}=0.$$

Funkciju $(n, k)\mapsto\binom{n}{k}$ možemo predstaviti i u obliku:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,.\qquad(1)$$

Zaista,

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!}\cdot\frac{(n-k)[n-(k+1)]\dots 2\cdot 1}{(n-k)[n-(k+1)]\dots 2\cdot 1}=$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad (0\leqslant k\leqslant n).$$

Iz prethodne jednakosti proizilazi da je:

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{0}{0}=1,\ \binom{n}{n}=1,\ \binom{n}{1}=n.$$

163.

$$\binom{8}{5}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=8\cdot 7=56$$

$$\binom{10}{5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252$$

$$\binom{5}{7}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=0.$$

Ako su brojevi n i k jako veliki i po veličini su bliski, onda je cjelishodnije primijeniti formulu (1).

164.

$$\binom{100}{98}=\frac{100!}{(100-98)!\,98!}=\frac{100\cdot 99\cdot 98!}{2!\cdot 98!}=$$

$$=\frac{100\cdot 99}{2}=50\cdot 99=4950.$$

165.

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{(n-0)!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!\cdot 1}=1$$

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{(n-n)!\cdot n!}=\frac{n!}{0!\cdot n!}=1$$

$$\binom{0}{0}=\frac{0!}{(0-0)!\cdot 0!}=\frac{0!}{0!\cdot 0!}=\frac{1}{1\cdot 1}=1.$$

166.

Za funkciju $(n,k)\mapsto\binom{n}{k}$ vrijede sljedeće relacije:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad (2)$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}. \qquad (3)$$

Dokaz. Formulu (2) dokazaćemo na osnovu relacije:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (4)$$

Ako u identitetu (4) umjesto k stavimo $n-k$, dobija se:

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (5)$$

Upoređivanjem (4) i (5) vidimo da su im desne strane jednake, onda su im i lijeve jednake, pa je zaista

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Ovaj obrazac važi za slučaj kada su n i k $(n\geqslant k)$ prirodni brojevi. Za $k=0$, on takođe važi.

Valjanost relacije (3) dokazaćemo na sljedeći način:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot[n-(k-1)]}{k!}+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot[n-(k-1)]\cdot(n-k)}{k!\,(k+1)}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot[n-(k-1)]}{k!}\cdot\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right)=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot[n-(k-1)]}{k!}\cdot\frac{k+1+n-k}{k+1}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdot\ \dots\ \cdot[(n-(k-1)](n+1)}{k!\,(k+1)}=$$

$$=\frac{(n+1)[(n+1)-1][(n+1)-2]\dots\{(n+1)-[(k+1)-1]\}}{k!\,(k+1)}=$$

$$=\binom{n+1}{k+1}.$$

6*

167.

Pokazati da je $\binom{8}{5}+\binom{8}{6}=\binom{9}{6}$

Rješenje. $$\binom{8}{5}+\binom{8}{6}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=$$
$$=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\left(1+\frac{3}{6}\right)=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{9}{6}=$$
$$=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\binom{9}{6}.$$

Može se dati i opštija definicija funkcije $(n, k)\mapsto\binom{n}{k}$ od definicije (1) i ona glasi:

Ako je n realan broj i k nenegativan cio broj, onda je

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots a-(k-1)}{k!} & (n \text{ realan broj, } k \text{ prirodan broj})\\ 1 & (n \text{ realan broj, } k=0)\end{cases}$$

Ako je $n<k$ i n nije prirodan broj ili nula, tada $\binom{n}{k}$ nije jednako nuli. Tako, na primjer:

$$\binom{1/3}{2}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot2}=-\frac{1}{9}.$$

Formula (2) ne važi ako se n zamijeni sa r (r ma kakav realan broj), dok formula (3) ostaje u važnosti i u tom slučaju.

168.

Pokazati da je: $\binom{1/3}{2}+\binom{1/3}{3}=\binom{4/3}{3}$.

Rješenje. $$\binom{1/3}{2}+\binom{1/3}{3}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot2}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot2\cdot3}=$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot2}\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\right)=$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot2}\cdot\frac{3+\frac{1}{3}-2}{3}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)}{1\cdot2\cdot3}=\binom{4/3}{3}.$$

169.

Pokazati da je $\binom{-1}{k}=(-1)^k$, za $k\in\mathbf{N}$.

Rješenje. $$\binom{-1}{k}=\frac{(-1)(-2)(-3)\cdot\ldots\cdot(-k)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}=$$
$$=\frac{(-1)^k(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}=(-1)^k.$$

170.

Pokazati da je $\binom{-2}{k}=(-1)^k(1+k)$, za $k\in\mathbf{N}$.

Rješenje. $$\binom{-2}{k}=\frac{(-2)(-3)(-4)\cdot\ldots\cdot(-k)(-k-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}=$$
$$=\frac{(-1)^k\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}=$$
$$=\frac{(-1)^k\cdot k!\,(k+1)}{k!}=(-1)^k\cdot(k+1).$$

171.

Pokazati da je $\binom{-n}{k}=(-1)^k\binom{k+n-1}{k}$, $(k\in\mathbf{N})$.

Rješenje. $$\binom{-n}{k}=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots[-n-(k-1)]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}=$$
$$=(-1)^k\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot[n+(k-1)]}{k!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)!}=$$
$$=(-1)^k\cdot\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}=(-1)^k\cdot\binom{n+k-1}{k}.$$

172.

Pokaži da je $\binom{-\frac{1}{2}}{k}=(-1)^k\cdot\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$.

Rješenje. $\binom{-\frac{1}{2}}{k}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left[-\frac{1}{2}-(k-1)\right]}{k!}=$

$$=(-1)^k\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!}=$$

$$=(-1)^k\cdot\frac{(2k-1)!!}{k!\cdot 2^k}=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

173.

Provjeriti identitet $n\binom{2n}{n}\equiv(n+1)\binom{2n}{n+1}$.

Rješenje. $n\binom{2n}{n}=n\cdot\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots[2n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)(n-1)n}=$

$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots[2n-(n-1)](2n-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)(n-1)\cdot n}\cdot\frac{n+1}{n+1}=$$

$$=(n+1)\cdot\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots[2n-(n-1)](2n-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)(n-1)n(n+1)}=$$

$$=(n+1)\binom{2n}{n+1}.$$

174.

Pokazati da je: $\binom{n}{n-1}+\binom{n+1}{n}=2n+1.$

Rješenje. Na osnovu već dokazane relacije (2) proizilazi da je

$$\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n \quad \text{i} \quad \binom{n+1}{n}=\binom{n+1}{1}=n+1.$$

Prema tome je: $\binom{n}{n-1}+\binom{n+1}{n}=n+n+1=2n+1.$

175.

Dokazati identitet

$$\binom{n-1}{k}+2\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-2}=\binom{n+1}{k},$$

gdje su n i k prirodni brojevi koji zadovoljavaju uslov $n>k\geqslant 2$.

Rješenje. $\binom{n-1}{k}+2\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-2}=\left\{\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right\}+\left\{\binom{n-1}{k-1}+\right.$

$$\left.+\binom{n-1}{k-2}\right\}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}.$$

3.3. **Binomni obrazac**

Za svaki prirodni broj n važi formula:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+$$

$$+\binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0 b^n \qquad (1)$$

koja se zove *binomna formula* ili *Njutnova formula.*

Budući da je: $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ i $b^0=a^0=1$, to prednja binomna formula poprima oblik:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+$$

$$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

Formula (1) može se napisati u sažetijem obliku ovako:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Koeficijenti $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ su prirodni brojevi.

Oni se zovu *binomni koeficijenti* za izložilac n.

176.

Metodom matematičke indukcije dokazati binomnu formulu (1).

Dokaz. Formula (1) vrijedi za $n=1$ jer je

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a^1 b^0+\binom{1}{1}a^0 b^1=a+b.$$

To je očito jer je $\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1$ i $a^0=b^0=1$.

Pretpostavimo da je formula ispravna za nekakvo n, pa dokažimo da ona vrijedi za $n+1$:

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=$$

$$=(a+b)\cdot\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\cdots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\binom{n}{n}b^n\right]=\binom{n}{0}a^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^nb+\left[\binom{n}{1}+\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2+\cdots+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}$$

Zbog $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ i $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$ i zbog $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

možemo definitivno pisati:

$$(a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\binom{n+1}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+$$

$$+\binom{n+1}{n}ab^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

To je upravo formula (1) samo što je n zamijenjeno sa $n+1$. Prema tome dokaz je završen.

177.

Primjenom binomnog obrasca razvij izraz $(a+b)^3$.

Rješenje. $(a+b)^3=\binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3.$

Pošto je $\binom{3}{0}=1$, $\binom{3}{1}=3$, $\binom{3}{2}=3$, biće

$$(a+b)^3=a^3+3\,a^2\,b+3\,ab^2+b^3.$$

178.

Primjenom binomnog obrasca razviti $(x-2\,x^2)^6$.

Rješenje. $(x-2\,x^2)^6=\binom{6}{0}x^6+\binom{6}{1}x^5\cdot(-2\,x^2)+\binom{6}{2}x^4\cdot(-2\,x^2)^2+$

$$+\binom{6}{3}x^3\cdot(-2\,x^2)^3+\binom{6}{4}x^2\cdot(-2\,x^2)^4+$$

$$+\binom{6}{5}x\cdot(-2\,x^2)^5+\binom{6}{6}(-2\,x^2)^6.$$

Pošto je: $\binom{6}{0}=1$, $\binom{6}{1}=6$, $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15$, $\binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$ i koristeći osobinu binomnih koeficijenata da je $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, biće:

$$\binom{6}{0}=\binom{6}{6}=1,\ \binom{6}{1}=\binom{6}{5}=6,\ \binom{6}{2}=\binom{6}{4}=15,$$

pa je:

$$(x-2\,x^2)^6=x^6+6\,x^5(-2x^2)+15\cdot x^4\cdot 4\,x^4+20\,x^3(-8\,x^6)+$$

$$+15\,x^2(16\,x^8)+6\,x(-32\,x^{10})+64\,x^{12}=x^6-$$

$$-12\,x^7+60\,x^8-160\,x^9+240\,x^{10}-192\,x^{11}+64\,x^{12}.$$

Pomoću binomne formule lako se dobije niz zanimljivih svojstava binomnih koeficijenata.

179.

Za binomne koeficijente vrijedi *zakon simetrije*:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Ovaj zakon nam kaže da su binomni koeficijenti u binomnom obrascu koji su podjednako udaljeni od krajeva međusobno jednaki, tj.:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n},\ \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1},\ \binom{n}{2}=\binom{n}{n-2},\ \text{itd.}$$

180.

Za binomne koeficijente vrijedi relacija:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Ovu smo relaciju dokazali u tački (3.2)

181.

Dokazati da je zbir svih binomnih koeficijenata u binomnoj formuli jednak 2^n, tj.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

Rješenje. Ako u binomnoj formuli:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{n}b^n$$

stavimo da je $a=1$ i $b=1$, dobićemo:

$$(1+1)^n=2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}.$$

182.

Dokazati da je $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0.$

Rješenje. Ako u binomnom obrascu

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

stavimo da je $a=1$ i $b=-1$, dobićemo

$$(1-1)^n=0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k.$$

Zadatak je, kao što se vidi, trivijalan u slučaju kada je n neparno jer onda koeficijenti, koji su jednako udaljeni od krajeva, imaju različit predznak, pa se zbog zakona simetrije binomnih koeficijenata po dva ukidaju. Kada je k paran, rezultat nije tako očit i stoga je zanimljiviji.

183.

Dokazati jednakost

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k}{k}=\binom{a+n+1}{n}.$$

Dokaz. Pošto je:

$$\binom{a+1}{0}=\binom{a+1}{1}=\binom{a+2}{1}$$

$$\binom{a+2}{1}+\binom{a+2}{2}=\binom{a+3}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{a+k}{k-1}+\binom{a+k}{k}=\binom{a+k+1}{k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{a+n-1}{n-2}+\binom{a+n-1}{n-1}=\binom{a+n}{n-1}$$

$$\binom{a+n}{n-1}+\binom{a+n}{n}=\binom{a+n+1}{n}$$

ako navedene jednačine saberemo dobija se:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a+k+1}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a+k+1}{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a+k+2}{k+1}$$

ili

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a+k+1}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a+k+1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{a+k+1}{k}+\binom{a+n+1}{n}$$

$$\binom{a+1}{0}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a+k+1}{k+1}=\binom{a+n+1}{n}$$

odnosno,

$$\binom{a}{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{a+k}{k}=\binom{a+n+1}{n}$$

i konačno

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k}{k}=\binom{a+n+1}{n}.$$

184.

Dokazati identitet

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}=\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}-2. \qquad (1)$$

Dokaz. Za $n=1$ relacija (1) je tačna, tj.

$$\frac{2!!}{3!!}=\frac{4!!}{3!!}-2$$

$$\frac{2}{1\cdot 3}=\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}-2$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Pretpostavimo da identitet (1) vrijedi za $n=k\geqslant 1$, tj. da je:

$$\sum_{r=1}^{k}\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}\equiv\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!}-2.$$

Dodajući lijevoj i desnoj strani $\frac{(2k+2)!!}{(2k+3)!!}$, dobijamo:

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{(2r)!!}{(2r+1)!!} = \left\{\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!} + \frac{(2k+2)!!}{(2k+3)!!}\right\} - 2$$

odnosno,

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{(2r)!!}{(2r+1)!!} = \frac{(2k+4)!!}{(2k+3)!!} - 2,$$

čime je obrazac dokazan.

185.

Matematičkom indukcijom dokazati nejednakost

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad (n=2, 3, 4, \ldots). \qquad (1)$$

Dokaz. Za $n=2$ relacija (1) odista vrijedi jer je

$$\frac{16}{3} < \frac{4!}{(2!)^2} = 6.$$

Pretpostavimo da relacija (1) vrijedi za proizvoljan prirodni broj $n=k(\geqslant 2)$, naime neka je:

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

odnosno,

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} > \frac{4^k}{k+1}. \qquad (2)$$

Sada dokažimo da relacija (1) vrijedi i za $n=k+1$. U tu svrhu pomnožimo lijevu i desnu stranu relacije (2) sa $\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$, dobije se:

$$\frac{(2k+2)!}{\{(k+1)!\}^2} > \frac{(2k+1)(2k+2)\cdot 4^k}{(k+1)^3}. \qquad (3)$$

što se može napisati u obliku:

$$\frac{(2k+2)!}{\{(k+1)!\}^2} > \frac{4^{k+1}}{k+2} \cdot \frac{(k+2)(2k+1)}{2(k+1)^2}. \qquad (4)$$

Kako je

$$\frac{(k+2)(2k+1)}{2(k+1)^2} = 1 + \frac{k}{2(k+1)^2} > 1 \quad (\text{za svako } k>0),$$

dobija se:

$$\frac{(2k+2)!}{\{(k+1)!\}^2} > \frac{4^{k+1}}{k+2}.$$

Ovim je dokaz nejednakosti (1) završen.

186.

Naći prirodan broj n koji zadovoljava jednačinu

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} - 8\binom{n}{1} = 0.$$

Rješenje.

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} - 8\binom{n}{1} = 0$$

$$\binom{n+1}{3} - 8n = 0$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} - 8n = 0$$

$$(n^2-1)n - 48n = 0$$

$$n(n^2-49) = 0$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 7, \quad n_3 = -7.$$

Pošto se tražio prirodan broj n koji zadovoljava datu jednačinu, to je rješenje $n=7$.

187.

Odredi k iz jednačine $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$.

Rješenje. Na osnovu jednakosti $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ naša jednačina poprima oblik:

$$\frac{14!}{k!(14-k)!} = \frac{14!}{(k-4)!(14-k+4)!}$$

$$\frac{1}{k!(14-k)!} = \frac{1}{(k-4)!(18-k)!}$$

$$k!(14-k)! = (k-4)!(18-k)!$$

$$k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!\cdot(14-k)! =$$
$$=(k-4)\cdot(18-k)(17-k)(16-k)(15-k)(14-k)!$$
$$k(k-1)(k-2)(k-3)=(18-k)(17-k)(16-k)(15-k).$$

Pošto su faktori i na lijevoj i na desnoj strani poredani po veličini, to je:

$$k=18-k$$
$$2k=18$$
$$k=9.$$

188.

Odredi n iz jednačine $\binom{n}{10}=\binom{n}{7}$.

Rješenje. Na osnovu jednakosti $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ naša jednačina poprima oblik:

$$\frac{n!}{10!(n-10)!}=\frac{n!}{7!(n-7)!}$$
$$\frac{1}{10!(n-10)!}=\frac{1}{7!(n-7)!}$$
$$10!(n-10)!=7!(n-7)!$$
$$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!\cdot(n-10)!=7!\cdot(n-7)(n-8)(n-9)\cdot(n-10)!$$
$$10\cdot 9\cdot 8=(n-7)(n-8)(n-9)$$
$$n-7=10$$
$$n=17.$$

189.

Naći n u izrazu $(a+b)^n$ ako se binomni koeficijent jedanaestog člana odnosi prema binomnom koeficijentu devetog člana kao $7:15$.

Rješenje. Za jedanaesti član je $k=10$, a za deveti $k=8$, pa je:

$$\binom{n}{10}:\binom{n}{8}=7:15$$
$$\frac{n!}{10!(n-10)!}:\frac{n!}{8!(n-8)!}=7:15$$

$$\frac{8!(n-8)!}{10!(n-10)!}=\frac{7}{15}$$
$$\frac{8!(n-8)(n-9)(n-10)!}{10\cdot 9\cdot 8!(n-10)!}=\frac{7}{15}$$
$$\frac{(n-8)(n-9)}{10\cdot 9}=\frac{7}{15}$$

$(n-8)(n-9)=7\cdot 6$ (poređani su po veličini)

$$n-8=7$$
$$n=15.$$

190.

Odrediti član koji u razvijenom obliku stepena

$\left(\frac{1}{a}+a^2\right)^9$ ne sadrži a.

Rješenje. Po binomnom obrascu je:

$$\left(\frac{1}{a}+a^2\right)^2=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{1}{a}\right)^{9-k}(a^2)^k=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}a^{-9+k}\cdot a^{2k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}a^{3k-9}.$$

Traženi član k po redu koji ne sadrži a, određuje se iz uslova da je:

$$3k-9=0,$$

pa je

$$k=3.$$

Znači, četvrti član datog binoma u razvijenom obliku neće sadržavati a. Zaista,

$$\binom{9}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^{9-3}\cdot(a^2)^3=\binom{9}{3}a^{-6}a^6=\binom{9}{3}a^0=\binom{9}{3}=84.$$

191.

Izračunati član razvoja binoma $\left(\frac{1}{x}-x\sqrt[3]{x^2}\right)^n$ koji ne sadrži x, ako se zna da je zbir svih binomnih koeficijenata 256.

Rješenje. Znamo da je zbir svih binomnih koeficijenata 2^n, stoga je:

$$2^n=256$$
$$2^n=2^8$$
$$n=8.$$

Po binomnom obrascu je:

$$\left(\frac{1}{x}-x\sqrt[3]{x^2}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{8-k}(-x\sqrt[3]{x^2})^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-1)^k x^{-(8-k)}x^{\frac{5}{3}k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-1)^k x^{\frac{8}{3}k-8}.$$

Odredimo k iz uslova

$$\frac{8}{3}k-8=0.$$

Slijedi da je

$$k=3.$$

Traženi član je:

$$(-1)^3\binom{8}{3}=-56$$

i četvrti je po redu u razvoju.

192.

Izračunati član razvoja binoma $\left(4\sqrt[5]{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^n$, koji sadrži $x^2\cdot\sqrt[5]{x^4}$, ako je zbir prva tri binomna koeficijenta jednak 56.

Rješenje. Iz uslova zadatka je:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=56$$

$$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=56$$

$$n^2+n-110=0$$

čija su rješenja $n=10$ i $n=-11$, od kojih $n=10$ ima smisla.

Prema tome je:

$$\left(4\sqrt[5]{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(2^2)^{10-k}x^{\frac{1}{5}(10-k)}2^{-k}x^{\frac{k}{3}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^{20-3k}x^{2+\frac{2k}{15}}.$$

Kako je $x^2\sqrt[5]{x^4}=x^{\frac{14}{5}}$, to dobijamo da je

$$2+\frac{2k}{15}=\frac{14}{5} \quad \text{i}$$

$$k=6.$$

Dakle, sedmi član po redu u razvoju datog binoma ima traženu osobinu i on je jednak:

$$\binom{10}{6}2^2x^2\sqrt[5]{x^4}=4\binom{10}{4}x^2\sqrt[5]{x^4}=840\,x^2\sqrt[5]{x^4}.$$

193.

Naći trinaesti član razvoja binoma $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, ako je binomni koeficijent trećeg člana jednak 105.

Rješenje. Iz uslova zadatka imamo da je

$$\binom{n}{2}=105$$

$$\frac{n(n-1)}{2}=105$$

$$n^2-n-210=0$$

$$n=15,\ n=-14.$$

Iz razumljivog razloga u obzir dolazi $n=15$, pa je traženi trinaesti član:

$$\binom{15}{12}(9x)^{15-12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12}=\binom{15}{15-12}\cdot3^6\cdot x^3\cdot\frac{1}{3^6\cdot x^6}=$$

$$=\binom{15}{3}\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{455}{x^3}.$$

194.

Odredi x ako je četvrti član binoma

$$\left(10^{\log\sqrt{x}}+10^{\frac{-1}{\log x}}\right)^7$$

jednak 3,500.000.

Rješenje. Pošto je za četvrti član $k=3$, to je

$$\binom{7}{3}\cdot 10^{4\log\sqrt{x}}\cdot 10^{\frac{-3}{\log x}}=3.500\,000$$

$$35\cdot 10^{4\log\sqrt{x}-\frac{3}{\log x}}=35\cdot 10^5/:35$$

$$10^{4\log\sqrt{x}-\frac{3}{\log x}}=10^5$$

$$4\log x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{\log x}=5/\cdot\log x$$

$$2\log^2 x-5\log x-3=0.$$

Rješenja dobijene kvadratne jednačine po $\log x$ su:

$$\log x=3 \text{ i } \log x=-\frac{1}{2}.$$

Odavde je:

$$x_1=10^3=1000 \text{ i } x_2=10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

195.

Naći srednji član razvoja binoma $\left(\frac{a}{x}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}$.

Rješenje. Pošto će razvijeni oblik binoma imati 17 članova, to je deveti član razvoja srednji član i on glasi:

$$\binom{16}{8}\left(\frac{a}{x}\right)^{16-8}\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)^8=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{a^8}{x^8}\cdot x^4=$$

$$=12870\frac{a^8}{x^4}.$$

196.

Odrediti redni broj onog člana razvoja binoma

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}, \text{ koji sadrži } a^7.$$

Rješenje. Ako je redni broj traženog člana $k+1$, onda je

$$\binom{12}{k}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-k}\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^k=$$

$$=\binom{12}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{12-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k a^{\frac{2}{3}(12-k)}\cdot a^{\frac{k}{2}}.$$

Kao što se vidi, stepen broja a je $\frac{2}{3}(12-k)+\frac{k}{2}$, a po uslovu zadatka stepen od a je 7, pa je:

$$\frac{2}{3}(12-k)+\frac{k}{2}=7$$

$$k=6.$$

Dakle, sedmi član razvoja datog binoma sadržavaće a^7.

197.

Naći redni broj onog člana razvoja binoma

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$$

koji sadrži a i b na isti eksponent.

Rješenje. Ako je redni broj traženog člana $k+1$, onda je:

$$\binom{21}{k}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^k=\binom{21}{k}a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}b^{\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6}}.$$

Pošto po uslovu zadatka a i b imaju iste eksponente, to je:

$$\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}=\frac{k}{2}-\frac{21-k}{6},$$

odakle je $k=9$. Znači deseti član po redu sadržavaće a i b sa jednakim eksponentima.

198.

Uprosti izraz $\left(\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{a-1}{a-a^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$ i odredi red člana razvoja koji ne sadrži a.

Rješenje. Poslije uprošćavanja dobijamo: $(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{2}})^{10}$. Ako je redni broj traženog člana $k+1$, onda je:

$$\binom{10}{k}a^{\frac{1}{3}(10-k)}\cdot(-a^{-\frac{1}{2}})^k=(-1)^k\cdot\binom{10}{k}a^{\frac{10-k}{3}}\cdot a^{-\frac{k}{2}}=$$

$$=(-1)^k\binom{10}{k}a^{\frac{10-k}{3}-\frac{k}{2}}.$$

Traženi član čiji redni broj $k+1$ ne sadrži a, određuje se iz uslova da je:

$$\frac{10-k}{3}-\frac{k}{2}=0,$$

odakle je $k=4$. Znači, peti član po redu neće sadržavati a, i on glasi:

$$(-1)^k\binom{10}{k}a^{\frac{10-k}{3}-\frac{k}{2}}=\binom{10}{4}a^{\frac{10-4}{3}-\frac{4}{2}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^0=210.$$

199.

Eksponent jednog binoma za 3 je veći od eksponenta drugog binoma. Odrediti ove eksponente, ako zbir binomnih koeficijenata oba razvoja iznosi 144.

Rješenje. Neka je x eksponent prvog binoma. Tada je zbir njegovih binomnih koeficijenata 2^x. Zbir binomnih koeficijenata drugog binoma je 2^{x+3} jer je eksponent drugog binoma veći za tri od eksponenta prvog. Pošto njihov zbir iznosi 144, to je:

$$2^x+2^{x+3}=144$$

$$2^x(1+2^3)=144$$

$$9\cdot 2^x=9\cdot 16$$

$$2^x=2^4$$

$$x=4.$$

Dakle, eksponent prvog binoma je 4, a drugog, koji je veći od prvog za 3, je 7.

200.

Kod razvoja $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^n$ koeficijent četvrtog i trinaestog člana međusobno su jednaki. Naći član koji ne sadrži x.

Rješenje. Po uslovu zadatka je

$$\binom{n}{3}=\binom{n}{12}.$$

Razvijanjem i sređivanjem dobije se

$$\frac{n!}{3!\,(n-3)!}=\frac{n!}{12!\,(n-12)!}$$

$$\frac{1}{3!\,(n-3)!}=\frac{1}{12!\,(n-12)!}$$

$$3!\,(n-3)!=12!\,(n-12)!$$

$$3!\,(n-3)(n-4)\cdots(n-11)(n-12)!=12\cdot 11\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3!\cdot(n-12)!$$

$$(n-3)(n-4)\cdots(n-11)=12\cdot 11\cdot\ldots\cdot 4.$$

Pošto su faktori i na lijevoj i na desnoj strani poredani po veličini, to je:

$$n-3=12$$

$$n=15.$$

Prema tome, član razvoja binoma koji ne sadrži x biće:

$$\binom{15}{k}{x^2}^{(15-k)}\left(\frac{a}{x}\right)^k=\binom{15}{k}a^k x^{30-3k}.$$

Po uslovu zadatka, traži se onaj član koji ne sadrži x, a to je onaj kod koga je eksponent od x jednak nuli, tj.

$$30-3k=0$$

$$k=10.$$

Dakle, jedanaesti član po redu neće sadržavati x.

Zaista,

$$\binom{15}{k}a^k x^{30-3k}=\binom{15}{10}a^{10}x^0=\frac{15!}{10!(15-10)!}a^{10}=$$

$$=\frac{15}{10!\cdot 5!}a^{10}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{10}=3003\,a^{10}.$$

201.

Za koju vrijednost n koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana razvoja binoma $(1+x)^n$ čine aritmetičku progresiju?

Rješenje. Prema uslovu zadatka brojevi $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ su članovi aritmetičke progresije. To znači da je:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}=2\binom{n}{2}$$

$$n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$n^2-9n+14=0$$

$$n_1=7,\quad n_2=2.$$

Rješenje zadatka je $n=7$, jer za $n=2$ razvijeni binom ima samo 3 člana, a po uslovima zadatka ima i četvrti član.

202.

Koeficijenti petog, šestog i sedmog člana razvoja binoma $(1+x)^n$ čine aritmetičku progresiju. Naći n.

Rješenje. Prema uslovu zadatka brojevi $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$, $\binom{n}{6}$ su članovi aritmetičke progresije. Zato je:

$$\binom{n}{4}+\binom{n}{6}=2\binom{n}{5}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!\cdot 5\cdot 6}=$$

$$=2\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!\cdot 5}$$

Ako lijevu i desnu stranu podijelimo izrazom $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$, dobijamo:

$$1+\frac{(n-4)(n-5)}{5\cdot 6}=\frac{2(n-4)(n-5)}{5}$$

$$n^2-21n+98=0$$

$$n=14, \quad n=7$$

Rješenje je $n=14$ ili $n=7$.

203.

Odrediti x u izrazu: $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$, tako da četvrti član razvoja binoma bude $56a^{5,5}$.

Rješenje. Prvi sabirak binoma možemo napisati u obliku:

$a^{\frac{4}{5}-\frac{x-1}{x}}=a^{\frac{5-x}{5x}}$, a drugi pak u obliku: $a\cdot a^{\frac{x-1}{x+1}}=a^{\frac{2x}{x+1}}$.

Prema tome, četvrti član razvoja binoma glasi:

$$\binom{8}{3}a^{\frac{5(5-x)}{5x}}\cdot a^{\frac{6x}{x+1}}=56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}}.$$

Po uslovu zadatka je

$$56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}}=56a^{5,5}.$$

Prema tome je:

$$\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}=5,5$$

$$x=2, \quad x=-5$$

Prema tome je: $x=2$ ili $x=-5$.

204.

Odrediti x u izrazu $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$ u kome je odnos sedmog člana od početka razvoja binoma prema sedmom članu od kraja $\frac{1}{6}$.

Rješenje. Sedmi član razvoja binoma $(2^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})^x$ je:

$$\binom{x}{6}(2^{\frac{1}{3}})^{x-6}(3^{-\frac{1}{3}})^6=\binom{x}{6}2^{\frac{x-6}{3}}\cdot 3^{-2},$$

a sedmi član od kraja je:

$$\binom{x}{6}(2^{\frac{1}{3}})^6\cdot(3^{-\frac{1}{3}})^{x-6}=\binom{x}{6}2^2\cdot 3^{\frac{6-x}{3}}.$$

Vidimo da su im binomni koeficijenti jednaki, a to proizilazi iz njihove osobine simetričnosti. Prema uslovu zadatka je:

$$\binom{x}{6}\cdot 2^{\frac{x-6}{3}}\cdot 3^{-2}:\binom{x}{6}\cdot 2^2\cdot 3^{\frac{6-x}{3}}=\frac{1}{6}$$

$$2^{\frac{x-12}{3}}\cdot 3^{\frac{x-12}{3}}=\frac{1}{6}$$

$$(2\cdot 3)^{\frac{x-12}{3}}=\frac{1}{6}$$

$$6^{\frac{x-12}{3}}=\frac{1}{6}$$

$$6^{\frac{x-12}{3}}=6^{-1}$$

$$\frac{x-12}{3}=-1$$

$$x=9.$$

205.

Naći vrijednost x u izrazu $(x+x^{\log x})^5$ čiji je treći član razvoja 1000 000.

Rješenje. Po uslovu zadatka je:

$$\binom{5}{2} x^3\cdot(x^{\log x})^2 = 1\,000\,000$$

$$10\, x^{3+2\log x} = 10^6$$

$$x^{3+2\log x}=10^5.$$

Logaritmirajući posljednju jednakost, nalazimo da je:

$$(3+2\log x)\cdot\log x = 5\log 10$$

$$2\log^2 x+3\log x-5=0$$

$$(\log x_1)=1,\quad (\log x_2)=-\frac{5}{2}$$

$$x_1=10,\quad x_2=10^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{100\sqrt{10}}.$$

206.

Naći vrijednost x u izrazu $[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}}+\sqrt[12]{x}]^6$ čiji je četvrti član razvoja binoma 200.

Rješenje. Po uslovu zadatka je:

$$\binom{6}{3}(\sqrt{x})^{\frac{3}{\log x+1}}\cdot(\sqrt[12]{x})^3=200$$

$$20\, x^{\frac{\log x+7)}{4(\log x+1)}}=20\cdot 10$$

$$x^{\frac{\log x+7}{4(\log x+1)}}=10.$$

Logaritmiranjem lijeve i desne strane i sređivanjem dobija se:

$$\log^2 x+3\log x-4=0$$

$$(\log x_1)=1,\quad (\log x_2)=-4$$

$$x_1=10,\quad x_2=10^{-4}=0{,}0001.$$

207.

Odrediti x u izrazu: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+x^{\log\sqrt{x}}\right)^9$, tako da treći član razvoja binoma bude 36 000.

Rješenje. Rješava se kao prethodni zadatak. Pri rješavanju dolazi se do jednačine:

$$x^{\log x-2}=1000.$$

Logaritmirajući dobijamo:

$$(\log x-2)\log x=\log 1000$$

$$\log^2 x-2\log x-3=0$$

$$(\log x_1)=3\quad \text{i}\quad (\log x_2)=-1$$

$$x_1=1000,\quad x_2=0{,}1.$$

208.

Odrediti za koju vrijednost x u razvoju binoma $\left(\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ je član, koji sadrži x sa dvostruko većim eksponentom od eksponenta sljedećeg člana, za 30 manji od tog sljedećeg člana.

Rješenje. Ako je član razvoja datog binoma koji sadrži x sa dvostruko većim eksponentom od eksponenta sljedećeg člana $(k+1)$-og po redu, onda on ima oblik:

$$\binom{12}{k}x^{\frac{12-k}{6}}x^{-\frac{k}{2}}=\binom{12}{k}x^{\frac{6-2k}{3}}.$$

Sljedeći član razvoja glasi:

$$\binom{12}{k+1}x^{\frac{11-k}{6}}x^{-\frac{k+1}{2}}=\binom{12}{k+1}x^{\frac{4-2k}{3}}.$$

Po uslovu zadatka je eksponent $\frac{6-2k}{3}$ dvostruko veći od eksponenta $\frac{4-2k}{3}$, tj.

$$\frac{6-2k}{3}=2\cdot\frac{4-2k}{3},\ \text{odakle je } k=1.$$

Takođe po uslovu zadatka je:

$$\binom{12}{k+1}x^{\frac{4-2k}{3}}-\binom{12}{k}x^{\frac{6-2k}{3}}=30$$

$$\binom{12}{2}x^{\frac{2}{3}}-\binom{12}{1}x^{\frac{4}{3}}=30$$

$$\frac{12\cdot 11}{2}x^{\frac{2}{3}}-12x^{\frac{4}{3}}=30$$

$$66x^{\frac{2}{3}}-12x^{\frac{4}{3}}=30/:6$$

$$11x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{4}{3}}=5$$

$$2x^{\frac{4}{3}}-11x^{\frac{2}{3}}+5=0.$$

Uvedemo li smjenu $x^{\frac{2}{3}}=y$, biće:

$$2y^2-11y+5=0$$

$$y_1=5,\quad y_2=\frac{1}{2}.$$

Vratimo li se na staru promjenljivu $x^{\frac{2}{3}}=y$ dobićemo:

$$x_1=5\sqrt{5},\quad x_2=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

209.

Odrediti za koju je vrijednost od x četvrti član razvoja binoma $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$ dvadeset puta veći od eksponenta binoma, ako je binomni koeficijent $4-$og člana pet puta veći od binomnog koeficijenta 2—og člana.

Rješenje. Po uslovu zadatka je:

$$5\cdot\binom{m}{1}=\binom{m}{3}$$

$$5m=\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

$$30=m^2-3m+2$$

$$m^2-3m-28=0$$

$$m_1=7,\quad m_2=-4.$$

Vrijedi samo $m=7$ jer po uslovu zadatka m mora biti cio pozitivan broj. Dakle, eksponent binoma je jednak 7, pa je:

$$\left(\sqrt{2^{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^7.$$

Pošto je četvrti član ovog binoma 20 puta veći od eksponenta 7, to će biti:

$$\binom{7}{3}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\cdot\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3=7\cdot 20$$

$$\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2^{2x-2}\cdot 2^{-x}=140$$

$$35\cdot 2^{x-2}=140$$

$$2^{x-2}=4$$

$$2^{x-2}=2^2$$

$$x-2=2$$

$$x=4.$$

210.

Naći za koje vrijednosti od x razlika između četvrtog i šestog člana razvoja binoma:

$$\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}\;\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^m$$

iznosi 56, ako je poznato da je eksponent binoma m za 20 manji od binomnog koeficijenta trećeg člana razvoja.

Rješenje. Iz uslova zadatka imamo da je:

$$\binom{m}{2}-m=20$$

$$\frac{m(m-1)}{2}-m=20$$

$$m^2-3m-40=0$$

$$m_1=8,\quad m_2=-5.$$

Vrijedi samo $m=8$ jer se pretpostavlja da je eksponent binoma cio pozitivan broj. Prema tome, dati binom će poprimiti oblik:

$$\left(2^{\frac{x}{2}-\frac{3}{16}}+2^{\frac{5}{16}-\frac{x}{2}}\right)^8.$$

Iz uslova zadatka takođe imamo:

$$\binom{8}{3}\cdot 2^{5\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{16}\right)}\cdot 2^{3\left(\frac{5}{16}-\frac{x}{2}\right)}-\binom{8}{5}2^{3\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{16}\right)}\cdot 2^{5\left(\frac{5}{16}-\frac{x}{2}\right)}=56.$$

Poslije sređivanja dobijamo:

$$56\cdot 2^x - 56\cdot\frac{2}{2^x} = 56$$

$$2^{2x} - 2^x - 2 = 0.$$

Uzimajući smjenu $2^x = y$ dobijamo:

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

odakle je:

$$y_1 = 2 \quad \text{i} \quad y_2 = -1.$$

Pošto $2^x = y$ ne može biti negativan broj, to vrijedi samo $y = 2$, pa je:

$$2^x = 2$$

$$x = 1.$$

211.

Naći za koje vrijednosti x u razvoju binoma

$$\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$$

zbir trećeg i petog člana iznosi 135, ako je zbir binomnih koeficijenata tri posljednja člana 22.

Rješenje. Pošto su binomni koeficijenti članova koji su jednako udaljeni od krajeva razvoja binoma jednaki, to mi možemo umjesto koeficijenata tri posljednja člana uzeti koeficijente tri prva člana, tj.

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} = 22$$

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{2} = 22$$

$$m^2 + m - 42 = 0$$

$$m_1 = 6, \quad m_2 = -7.$$

Pošto u obzir dolazi samo $m = 6$, to dati binom poprima oblik

$$\left(2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{1-x}{2}}\right)^6.$$

Prema uslovu zadatka je

$$\binom{6}{2}\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^4\left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^2 + \binom{6}{4}\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2\left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^4 = 135.$$

Poslije uprošćavanja dobija se:

$$2^{x+1} + 2^{2-x} = 9$$

$$2\cdot 2^x + \frac{2^2}{2^x} = 9$$

$$2\cdot 2^{2x} - 9\cdot 2^x + 4 = 0$$

smjena: $2^x = y$

$$2y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1.$$

212.

Odrediti za koje vrijednosti x šesti član razvoja binoma

$$\left[\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right]^m$$

iznosi 21, ako je poznato da binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana razvoja predstavljaju redom prvi, treći i peti član aritmetičke progresije.

Rješenje. Brojevi a_1, a_3, a_5 koji su redom prvi, treći i peti član aritmetičke progresije, sami obrazuju aritmetičku progresiju jer je:

$$2a_3 = a_1 + a_5.$$

Kako je po uslovu zadatka:

$$a_1 = \binom{m}{1}, \quad a_3 = \binom{m}{2}, \quad a_5 = \binom{m}{3},$$

to je:

$$\frac{2m(m-1)}{1\cdot 2} = m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$m^2 - 9m + 14 = 0$$

$$m_1 = 7, \quad m_2 = 2.$$

Pošto po uslovu o razvoju binoma imamo ne manje od šest članova, to je $m \geqslant 5$, što znači da vrijedi samo $m = 7$. Prema tome binom glasi:

$$\left[2^{\frac{1}{2}\log(10-3^x)} + 2^{\frac{x-2}{5}\log 3}\right]^7$$

Po uslovu zadatka je:

$$\binom{7}{5} 2^{\log(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\log 3} = 21$$

$$2^{\log(10-3^x)+(x-2)\log 3} = 1 = 2^0$$

$$(x-2)\log 3 + \log(10-3^x) = 0$$

$$\log[3^{x-2} \cdot (10-3^x)] = 0.$$

Antilogaritmirajući dobijamo da je:

$$3^{x-2} \cdot (10-3^x) = 1$$

$$\frac{3^x}{3^2}(10-3^x) = 1$$

$$10 \cdot 3^x - 3^{2x} = 9$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

Smjena $3^x = y$

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

$$y_1 = 9, \quad y_2 = 1.$$

Vraćanjem dobijenih vrijednosti za y_1 i y_2 u uvedenu smjenu, dobijamo da je:

$$x_1 = 2 \quad \text{i} \quad x_2 = 0.$$

213.

Odrediti za koje vrijednosti od x je četvrti član razvoja binoma

$$\left[(\sqrt[3]{5})^{-\frac{1}{2}\log(6-\sqrt{8x})} + \sqrt[6]{\frac{5^{\log(x-1)}}{25^{\log 5}}}\right]^m$$

jednak 16,8 ako je poznato da $\frac{14}{9}$ binomnog koeficijenta trećeg člana razvoja i binomni koeficijenti njegovog četvrtog i petog člana čine geometrijsku progresiju.

Rješenje. Prema uslovu zadatka brojevi:

$$\frac{14}{9}\binom{m}{2}, \ \binom{m}{3} \ \text{i} \ \binom{m}{4}$$

čine geometrijsku progresiju, pa je na osnovu svojstva članova geometrijske progresije:

$$\frac{14}{9}\binom{m}{2} \cdot \binom{m}{4} = \binom{m}{3}^2.$$

Obje strane posljednje jednakosti možemo podijeliti sa $m^2(m-1)^2(m-2)$, pošto ni m, ni $(m-1)$, ni $(m-2)$ nisu jednaki nuli (jer iz uslova zadatka proizilazi da je $m \geq 3$), dobijamo da je $m = 9$.

Pošto je po uslovu zadatka četvrti član razvoja binoma jednak 16,8 to je:

$$\binom{9}{3} \cdot 5^{-\log(6-\sqrt{8x})} \cdot 5^{\frac{1}{2}\log(x-1)-\log 5} = 16{,}8$$

$$84 \cdot 5^{-\log(6-\sqrt{8x})+\frac{1}{2}\log(x-1)-\log 5} = 16{,}8 / : 16{,}8$$

$$5 \cdot 5^{-\log(6-\sqrt{8x})+\frac{1}{2}\log(x-1)-\log 5} = 1$$

$$5^{1-\log(6-\sqrt{8x})+\frac{1}{2}\log(x-1)-\log 5} = 5^0$$

$$1 - \log(6-\sqrt{8x}) + \frac{1}{2}\log(x-1) - \log 5 = 0.$$

Poslije sređivanja i antilogaritmiranja dobijamo:

$$10\sqrt{x-1} = 5(6-\sqrt{8x})$$

$$x_1 = 50, \quad x_2 = 2.$$

Prvi korijen ne vrijedi jer je za $x = 50$ broj $(6-\sqrt{8x})$ negativan, što znači da nema logaritma.

Prema tome, rješenje je $x = 2$.

214.

Odrediti za koju vrijednost x razlika između devetostrukog trećeg člana razvoja binoma

$$\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4} \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^m$$

i petog člana tog istog razvoja iznosi 240, ako je poznato da je razlika između logaritma utrostručenog binomnog koeficijenta četvrtog člana razvoja i logaritma binomnog koeficijenta drugog člana 1.

Rješenje. Po uslovu zadatka je

$$\log\left[3 \cdot \binom{m}{3}\right] - \log\binom{m}{1} = 1$$

ili

$$\log \frac{3\cdot\binom{m}{3}}{\binom{m}{1}} = \log 10.$$

Odavde je:

$$\frac{3\cdot\binom{m}{3}}{\binom{m}{1}} = 10, \quad \text{odnosno}$$

$$m^2 - 3m - 18 = 0$$

$$m_1 = 6, \quad m_2 = -3.$$

Prema tome, eksponent binoma je $m=6$, pa dati binom poprima oblik:

$$(2^{\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}} + 2^{\frac{x}{2}+\frac{2}{3}})^6.$$

Iz uslova zadatka dobijamo jednačinu:

$$9\cdot\binom{6}{2}\cdot 2^{4\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)}\cdot 2^{2\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)} -$$

$$-\binom{6}{4}\cdot 2^{2\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)}\cdot 2^{4\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)} = 240.$$

Odakle nalazimo:

$$9\cdot 2^{3x-2} - 2^{3x+1} = 16$$

ili

$$\frac{9\cdot 2^{3x}}{2^2} - 2^{3x}\cdot 2 = 16.$$

Prema tome je:

$$2^{3x} = 2^6$$

$$x = 2.$$

215.

Eksponent jednog binoma za 3 je veći od eksponenta drugog binoma. Odrediti te eksponente, ako suma binomnih koeficijenata oba razvijena binoma iznosi 144.

Rješenje. Ako je eksponent jednog binoma n, onda je eksponent drugog binoma $(n+3)$ s obzirom da je po uslovu zadatka za 3 veći od prvog.

Onda je zbir svih binomnih koeficijenata prvog binoma 2^n, a drugog 2^{n+3}. Po uslovu zadatka njihov zbir je jednak 144, tj.:

$$2^n + 2^{n+3} = 144$$

$$2^n(1+2^3) = 144$$

$$2^n = 16$$

$$2^n = 2^4$$

$$n = 4.$$

216.

U razvoju binoma: $\left(a\sqrt[5]{\frac{a}{3}} - \frac{b}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^n$ odrediti član koji sadrži a^3, ako je suma binomnih koeficijenata članova koji se nalaze na neparnom mjestu razvoja binoma jednaka 2048.

Rješenje. Pošto znamo da je suma koeficijenata koji stoje na parnom mjestu jednaka sumi koeficijenata koji stoje na neparnom mjestu, kao i činjenicu da je zbir svih binomnih koeficijenata jednak 2^n, tj.:

$$2^n = 2\cdot 2048$$

$$2^n = 2\cdot 2\cdot 2^{10}$$

$$2^n = 2^{12}$$

$$n = 12.$$

Prema tome, dati binom će poprimiti oblik:

$$(3^{-\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{6}{5}} - ba^{-\frac{3}{7}})^{12}.$$

Neka je traženi član $(k+1)$ -ti član, tj.:

$$\binom{12}{k}(3^{-\frac{1}{5}}a^{\frac{6}{5}})^{12-k}\cdot(-ba^{-\frac{3}{7}})^k =$$

$$= \binom{12}{k}\cdot 3^{\frac{k-12}{5}}(-b)^k\cdot a^{\frac{6(12-k)}{5}-\frac{3k}{7}}.$$

Da bi dobijeni član sadržavao a^3, treba da je:

$$\frac{6(12-k)}{5} - \frac{3k}{7} = 3$$

$$k = 7.$$

Prema tome, traženi, tj. osmi član glasi:

$$\binom{12}{7}\cdot 3^{-1}\cdot(-b)^7\cdot a^3 = -\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{3}a^3b^7 = -264a^3b^7.$$

217.

Koliko racionalnih članova sadrži razvoj binoma:

$$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}?$$

Rješenje. Opšti član razvoja glasi:

$$\binom{100}{k}(\sqrt{2})^{100-k}\cdot(\sqrt[4]{3})^{k}=\binom{100}{k}\cdot 2^{50}\cdot 2^{-\frac{k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{4}}.$$

Da bi članovi razvoja binoma bili racionalni brojevi, potrebno je i dovoljno da broj k bude djeljiv sa 4.

Traženi broj k će zadovoljavati nejednačinu $0\leqslant k\leqslant 100$. Da bi broj k bio djeljiv sa 4 treba da ima vrijednosti: 0, 4, 8, . . . , 96, 100. Broj tih vrijednosti k koje su djeljive sa 4 je n i nalazimo ga iz relacije:

$$100=0+4(n-1)$$

$$n=26.$$

Dakle, biće 26 različitih vrijednosti broja k koji su djeljivi sa 4.

218.

Naći najmanju vrijednost eksponenta m u razvoju

$$(1+x)^m,$$

u kome se dva susjedna člana odnose kao 7 : 15.

Rješenje. $\binom{m}{k}:\binom{m}{k+1}=7:15$

tj.

$$\frac{\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(k-1)]}{k!}}{\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(k-1)]\cdot(m-k)}{k!\,(k+1)}}=\frac{7}{15}$$

$$\frac{k+1}{m-k}=\frac{7}{15}$$

$$m=\frac{22k+15}{7}=(3k+2)+\frac{k+1}{7}$$

i $k+1$ mora biti djeljiv sa 7.

$$k=6+p\cdot 7 \qquad p\in\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Najmanji broj k je za $p=0$, tj. najmanje k je 6, a najmanji m je 21.

219.

Primjenom binomnog obrasca izračunati tačno na pet decimala vrijednost izraza $1{,}05^4$.

Rješenje. Izračunati vrijednost nekog izraza tačno na pet decimala, znači da greška rezultata ne bude veća od 0,00001 ili od 0,000005.

$$1{,}05^4=(1+0{,}5)^4=1+\binom{4}{1}\cdot 0{,}05+\binom{4}{2}\cdot 0{,}05^2+$$

$$+\binom{4}{3}\cdot 0{,}05^3+\binom{4}{4}\cdot 0{,}05^4=1+0{,}2+0{,}015+$$

$$+0{,}0005+0{,}00000625=1{,}21550\,625\approx 1{,}21551.$$

220.

Primjenom binomnog obrasca izračunati tačno na četiri decimale vrijednost izraza $\left(\frac{29}{30}\right)^{13}$.

Rješenje. $$\left(\frac{29}{30}\right)^{13}=\left(1-\frac{1}{30}\right)^{13}=1-\binom{13}{1}\cdot\frac{1}{30}+\binom{13}{2}\cdot\frac{1}{30^2}-+$$

$$-+\cdots-\frac{1}{30^{13}}=1-0{,}43333+0{,}08667-$$

$$-0{,}01059+0{,}00088-0{,}00005=0{,}64358\approx 0{,}6436.$$

221.

Dokazati da je $\sum_{r=0}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}=\binom{m+n}{k}$.

Dokaz. Kako je

$$(1+x)^m=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r$$

$$(1+x)^n=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s,$$

to će biti:

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r\cdot\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s. \qquad (1)$$

Međutim, s druge strane je

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k. \qquad (2)$$

8*

Sredimo li izraz (1) po potencijama od x i uporedimo ga s izrazom (2), moraju koeficijenti uz jednake potencije od x biti jednaki, a to daje:

$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\cdots+$$

$$+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}=\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}.$$

Napomena: Iz dokazane formule izlazi posebno za $n=m=k$

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

3.4. **Zadaci za samostalan rad**

222.

Na osnovu relacije $(n+2)!!=n!!\,(n+2)$ dokazati da je

$$(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{n!\cdot 2^n}, \qquad (n\geqslant 0).$$

223.

Pokaži da je $\dfrac{1}{(k-1)!}-\dfrac{1}{k!}=\dfrac{1}{(k-2)!\cdot k}$.

224.

Dokazati nejednakost $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{4n}}$.

225.

Naći vrijednost izraza:

a) $8!+9!$, b) $10!-1!$, c) $\dfrac{102!}{100!}$, d) $\dfrac{6!-5!}{120!}$,

e) $\dfrac{10!+12!}{9!}$, f) $\dfrac{8!-7!}{7!}$, g) $\dfrac{12!-11!}{9!}$, h) $\dfrac{5!+6!}{4!}$.

226.

Skrati izraze:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$, b) $\dfrac{(n-2)!}{n!}$, c) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$, d) $\dfrac{2k(2k-1)}{(2k)!}$,

e) $\dfrac{(n-2)!}{(n+1)!}$, f) $\dfrac{(2n)!}{n!}$, g) $\dfrac{m!}{m-1}$.

227.

Uprostiti izraze:

a) $x!\,(x+1)$, b) $2\,(n+1)!+n\,(n+1)!$, c) $\dfrac{1}{k!}-\dfrac{k}{(k+1)!}$,

d) $\dfrac{1}{(k-1)!}-\dfrac{1}{k!}$, e) $\dfrac{p\,(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\cdot(p-4)!}{(p-2)!}$,

f) $\dfrac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots[m-(k-1)]}{m!}$, $\quad m\geqslant k$.

228.

Napisati izraze bez znaka faktorijela:

a) $(2n+2)!$, b) $2\cdot n!$, c) $(3n)!$

229.

Riješiti jednačine:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}=72$, b) $\dfrac{(k+1)!}{(k-1)!}=30$,

c) $\dfrac{(2n)!}{(2n-3)!}=\dfrac{20\,n!}{(n-2)!}$, d) $\dfrac{k!}{(k-4)!}=\dfrac{12\,k}{(k-2)!}$.

230.

Riješiti nejednačine:

a) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}<72$, b) $\dfrac{(2n-1)!}{(2n-3)!}>420$,

c) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)\,(n+2)}<1000$, d) $\dfrac{(n-4)\,(n-3)}{(n-3)!}>0{,}00002$.

231.

Dokazati relacije:

a) $\dfrac{(m+3)!}{m!}=(m+1)(m+2)(m+3)$,

b) $\dfrac{m!}{(n-m)!}=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+2)(n-m+1)$, za $n>m$.

232.

Naći razvoj binoma:

a) $(a+b)^6$,

b) $(\sqrt{x}+4)^4$,

c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8$,

e) $\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^6$.

233.

Naći treći član razvoja binoma $(x+3)^5$.

234.

Naći sedmi član razvoja binoma $(2x-3)^{10}$.

235.

Naći peti član razvoja binoma $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{12}$.

236.

Naći onaj član razvoja binoma $(\sqrt{x}+a)^9$ koji sadrži x^3.

237.

Naći peti član razvoja binoma $\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, ako je koeficijent trećeg člana jednak 66.

238.

Razvojem binoma $(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a^{-1}})^{15}$ odrediti član koji ne zavisi od a.

239.

Zbir binomnih koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana razvoja binoma $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ je 11. Naći član koji sadrži x^2.

240.

Naći srednji član razvoja binoma

$$\left(a\sqrt[-2]{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^m,$$

ako je poznato da se binomni koeficijent petog člana odnosi prema koeficijentu trećeg člana kao 14 : 3.

241.

Zbir binomnih koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana razvoja binoma $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^m$ je 46. Naći član koji ne sadrži x.

242.

Naći onaj član razvoja binoma $(x\sqrt{x}+\sqrt[-3]{x})^m$ koji sadrži x^5 ako je zbir svih binomnih koeficijenata jednak 128.

243.

Odrediti x u izrazu $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\dfrac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$, tako da treći član razvoja binoma bude 240.

244.

Šesti član razvoja binoma $\left(\dfrac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\log x}\right)^8$ je 5600. Naći x.

245.

Deveti član razvoja binoma

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{x})^{5\log x}}+x^{2\log x}\cdot\sqrt{x}\right]^{10}$$ je 450. Naći x.

246.

Suma binomnih koeficijenata drugog i trećeg člana razvoja binoma $(\sqrt[5]{x^2}+x^{-\frac{1}{6}})^n$ jednak je 153. Odrediti član razvoja binoma koji ne sadrži x.

247.

Metodom indukcije dokazati

$$\binom{k}{1}+2\binom{k}{2}+3\binom{k}{3}+\cdots+k\binom{k}{k}=k\cdot 2^{k-1}$$

248.

Dokazati da se između svih trocifrenih brojeva samo broj 145 može napisati kao suma faktorijela svojih cifara.

Rješenje. Kako je

$$1!+4!+5!=1+24+120=145,$$

to broj 145 stvarno zadovoljava uslove zadatka. Predstoji nam da dokažemo da drugih trocifrenih brojeva, koji zadovoljavaju uslove zadatka, nema.

Pretpostavimo da je broj

$$100x+10y+z=x!+y!+z!$$

trocifren.

Zbog toga što je $7!>1000$, to ni jedna cifra broja $100x+10y+z$ nije veća od 6.

Takođe je jasno, da ni jedna od cifara x, y, z ne može biti jednaka ni 6, jer kada bi ma koja od cifara x, y, z bila jednaka 6, tada bi bilo:

$$x!+y!+z!>700,$$

što je nemoguće, jer je $100x+10y+z<700$.

Sada je potrebno dokazati da je bar jedna od cifara x, y, z jednaka 5. Zaista, kada ni jedna od cifara x, y, z ne bi bila jednaka 5, tada bi:

$$x!+y!+z!<100$$

što ne zadovoljava jer $100x+10y+z$ treba da bude trocifren broj. Prema tome, jedna je cifra 5.

Pošto je

$$x!+y!+z!\leqslant 5!+5!+5!=360,$$

to cifra x koja obilježava stotine može da ima samo sljedeće tri vrijednosti i to 1, 2, 3.

Međutim, jasno je da je $x\neq 3$, jer je čak

$$3!+5!+5!<300$$

Uvjerićemo se takođe da je $x\neq 2$. Zaista, kada bi bilo $x=2$ tada bi trocifreni broj bio veći od 200, što je moguće samo tada, kada je $y=z=5$, ali broj 255 ne odgovara uslovima zadatka. Prema tome, $x=1$, što znači da je trocifreni broj oblika

$$100+50+z=150+z$$

(ako je $y=5$) ili

$$100+10y+5=105+10y$$

(ako je $z=5$). U prvom slučaju

$$150+z=5!+1!+z!, \text{ tj.}$$

$$150+z=121+z!$$

Tada je:

$$29=z[(z-1)!-1],$$

a to nije moguće ni za jedno $z\leqslant 5$.

U drugom slučaju,

$$105+10y=1!+5!+y!$$

tj.

$$y[10-(y-1)!]=16,$$

pa je y jedan od parnih brojeva 0, 2, 4. Prema tome, nepoznati broj treba tražiti između sljedeća tri broja:

105, 25, 145.

Imamo, dakle:

$$1!+0!+5!=122$$

$$1!+2!+5!=123$$

$$1!+4!+5!=145$$

Prema tome, samo broj 145 odgovara uslovima zadatka.

4. KOMPLEKSNI BROJEVI

Definišući prirodne, cijele, racionalne i iracionalne brojeve, učinili smo rješivim jednačine oblika $m+x=n$, $mx=n$ i $x^n=a$, gdje je a racionalan ili iracionalan pozitivan broj jer je tada izvodljiva operacija korjenovanja. Međutim, sa proučenim brojnim područjem nismo bili u mogućnosti da riješimo jednačinu oblika:

$$x^2+1=0$$

tj. jednačinu:

$$x^2=-1.$$

jer ona nema rješenje u području realnih brojeva, pošto je kvadrat realnog broja pozitivan broj ili nula, te ne može biti -1.

Izlaz iz ove situacije pronašao je švajcarski matematičar Ojler uvođenjem *imaginarne jedinice.*

Imaginarna jedinica, u oznaci i ili j, je jedinica koja ima osobinu da je njen kvadrat jednak -1, tj.

$$i^2=-1.$$

Iz definicije imaginarne jedinice proizilazi da je:

$$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$$
$$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$$
$$i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$$
$$i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$$
$$i^8=i^4\cdot i^4=1\cdot 1=1$$

....

....

....

Vidimo da svaka potencija imaginarne jedinice ima jednu od sljedeće četiri vrijednosti: ± 1 (ako je eksponent paran broj) ili $\pm i$ (ako je eksponent neparan broj).

Iz prednjeg potenciranja imaginarne jedinice možemo zaključiti da je za svaki prirodni broj n:

$$i^{4n}=1$$
$$i^{4n+1}=i$$
$$i^{4n+2}=-1$$
$$i^{4n+3}=-i$$

Na osnovu prednje četiri relacije možemo veoma brzo izračunati bilo koju potenciju imaginarne jedinice.

249.

Izračunati: a) i^{20}, b) i^{33}, c) i^{58}, d) i^{27}.

Rješenje.

a) $i^{20}=i^{4\cdot 5}=1,$

b) $i^{33}=i^{4\cdot 8+1}=i,$

c) $i^{58}=i^{4\cdot 14+2}=i^2=-1,$

d) $i^{27}=i^{4\cdot 6+3}=i^3=-i.$

250.

Izračunati i^n, gdje je n cio broj.

Rješenje.

$$i^n=\begin{cases}1, & \text{ako je } n=4k\\ i, & \text{ako je } n=4k+1\\ -1, & \text{ako je } n=4k+2\\ -i, & \text{ako je } n=4k+3 \text{ gdje je } k \text{ cio broj.}\end{cases}$$

4.1. Imaginarni brojevi

Proizvod imaginarne jedinice »i« s realnim brojem »$b\neq 0$« daje kao rezultat imaginarni broj u oznaci:

$$bi.$$

251.

Imaginarni brojevi su, na primjer:

$$2i,\ -3i,\ i\sqrt{3},\ \frac{2}{3}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}i,\ \pi i,\ \frac{\pi}{2}i, \text{ itd.}$$

Da bi imaginarni brojevi zaista ušli u red brojeva, potrebno je definisati računske operacije s njima.

a) Zbir dva imaginarna broja je opet imaginarni broj, tj.

$$ai + bi = (a + b)\,i.$$

252.

a) $2\,i + 3\,i = (2+3)\,i = 5\,i,$

b) $\frac{2}{3}i + 6\,i = \left(\frac{2}{3} + 6\right)i = 6\,\frac{2}{3}\,i,$

c) $i\sqrt{3} + 5\,i\sqrt{3} = 6\,i\sqrt{3}$

b) Razlika dva imaginarna broja $ai - bi$ $(a \neq b)$ je opet imaginaran broj, tj.

$$ai - bi = (a - b)\,i.$$

Za $a = b$ je ta razlika broj nula, $ai - ai = (a - a)\,i = 0.$

253.

a) $5\,i - 2\,i = (5-2)\,i = 3\,i,$

b) $4\,i - 7\,i = (4-7)\,i = -3\,i,$

c) $\frac{3}{2}i - \frac{2}{3}i = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)i = \frac{5}{6}i\;,$

d) $7\,i - 3\,i = 4\,i.$

c) Proizvod dva imaginarna broja je realan broj, tj.

$$ai \cdot bi = abi^2 = -ab.$$

254.

a) $2\,i \cdot 3\,i = 6\,i^2 = -6,$

b) $7\,i \cdot (-3\,i) = -21\,i^2 = 21,$

c) $\frac{2}{3}i \cdot \frac{5}{4}i = \frac{10}{12}i^2 = -\frac{5}{6}.$

d) Kod dijeljenja imaginarnih brojeva mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

1. Količnik dva imaginarna broja je realan broj, tj.

$$\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}.$$

2. Količnik imaginarnog i realnog broja je imaginaran broj, tj.

$$\frac{ai}{b} = \frac{a}{b}i.$$

3. Količnik realnog i imaginarnog broja je imaginaran broj, tj.

$$\frac{a}{bi} = \frac{a}{bi} \cdot \frac{i}{i} = \frac{ai}{bi^2} = -\frac{a}{b}i.$$

255.

a) $\frac{2\,i}{3\,i} = \frac{2}{3},$

b) $\frac{7\,i}{3} = \frac{7}{3}i\;,$

c) $\frac{4}{3\,i} = \frac{4}{3\,i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{4\,i}{3i^2} = -\frac{4}{3}i.$

e) Imaginarni broj se stepenuje tako što mu se stepenuje i realni koeficijent i imaginarna jedinica, tj.

$$(ai)^n = a^n\, i^n$$

256.

a) $(2\,i)^3 = 2^3 i^3 = 8 \cdot (-i) = -8\,i,$

b) $(-4\,i)^2 = 16\,i^2 = -16,$

c) $\left(\frac{2}{3}i\right)^5 = \frac{32}{243}i^5 = \frac{32}{243}i.$

257.

Izračunati: a) $\frac{1}{i}$, b) $\frac{1}{i^3}$, c) i^{-31}.

Rješenje.

a) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

b) $\frac{1}{i^3} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i^2} = (-i)(-1) = i,$

c) $i^{-31} = \frac{1}{i^{31}} = \frac{1}{i^{4\cdot 7+3}} = \frac{1}{i^3} = i.$

258.

Izračunati:

a) $4\,i^{12}-2\,i^{11}+3\,i^{15}-5\,i^{9}$, b) $i^{5}+i^{8}+i^{16}+i^{10}$,

c) $(-3\,i)^2\,(2\,i)^3\,(-i)^5$.

Rješenje.

a) $4\,i^{12}-2\,i^{11}+3\,i^{15}-5\,i^{9}=4\,i^{4\cdot 3}-2\,i^{4\cdot 2+3}+$

$+3\,i^{4\cdot 3+3}-5\,i^{4\cdot 2+1}=4-2\,i^3+3\,i^3-5\,i=$

$=4+i^3-5\,i=4-i-5\,i=4-6i,$

b) $i^5+i^8+i^{16}+i^{10}=i+1+1+i^2=i+2-1=i+1,$

c) $(-3\,i)^2\,(2\,i)^3\,(-i)^5=9\,i^2\cdot 8\,i^3\,(-i^5)=(-9)\,(-8\,i)\,(-i)=72.$

4.2. Algebarski oblik kompleksnog broja

Kompleksnim brojem u algebarskom obliku nazivamo svaki izraz oblika $a+bi$, gdje su »a« i »b« realni brojevi.

Na primjer, kompleksni brojevi su:

a) $z=2+3\,i$, b) $z=-7+4\,i$, c) $z=-\frac{2}{3}-5\,i$

d) $z=1-i$, e) $z=\ln 2-3\,i$, f) $z=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$.

Kao što vidimo kompleksni broj $z=a+bi$ sastavljen je od *realnog dijela a* i piše se $\text{Re}(z)=a$, i *imaginarnog dijela b* (a ne možda bi) i piše se $\text{Im}(z)=b$.

Tako je kod kompleksnog broja $z=2+3i$ je $\text{Re}(z)=2$,

a $\text{Im}(z)=3$, dok kod kompleksnog broja $z=-\frac{2}{3}-5\,i$

je $\text{Re}(z)=-\frac{2}{3}$, a $\text{Im}(z)=-5$.

259.

Odrediti realni i imaginarni dio brojeva:

a) $z=\frac{i}{2}-\text{tg}\,\alpha$, α realni broj,

b) $z=\frac{3+i}{4}$.

Rješenje.

a) $\text{Re}(z)=-\text{tg}\,\alpha$, $\text{Im}(z)=\frac{1}{2}$,

b) $\text{Re}(z)=\frac{3}{4}$, $\text{Im}(z)=\frac{1}{4}$.

Ako je kod kompleksnog broja $z=a+bi$ realan dio $a=0$, $b\neq 0$, onda dobijemo imaginarni broj $z=bi$ kao poseban slučaj kompleksnog broja. Ako je pak imaginaran dio $b=0$, $a\neq 0$ dobijamo realan broj $z=a$ kao poseban slučaj kompleksnog broja.

260.

Broj $z=3i$ je kompleksan broj kod koga je realan dio jednak nuli. Takođe je i broj $z=7$ kompleksan broj kod koga je imaginarni dio jednak nuli. Kao što vidimo, i realni i imaginarni brojevi su specijalni slučajevi kompleksnih brojeva.

Dva kompleksna broja mogu biti ili jednaka ili različita, dok odnosi $>$ i $<$ u oblasti kompleksnih brojeva nisu definisani. Dva kompleksna broja $z_1=x_1+iy_1$ i $z_2=x_2+iy_2$ su jednaki onda, i samo onda, ako je realan dio prvog, jednak realnom dijelu drugog, tj. $x_1=x_2$ i imaginarni dio prvog, jednak imaginarnom dijelu drugog kompleksnog broja, tj. $y_1=y_2$.

Dakle,

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \Rightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2, \text{ i}$$

$$x_1=x_2, y_1=y_2 \Rightarrow x_1+iy_1=x_2+iy_2.$$

Jednaki su, na primjer, kompleksni brojevi:

$$z_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{i} \quad z_2=\cos\pi+i\sin\frac{\pi}{4}$$

jer je $-1=\cos\pi$ i $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

261.

Na osnovu uslova jednakosti dva kompleksna broja odredi x i y iz relacije

$$2+5\,ix-3\,iy=14\,i+3\,x-5\,y.$$

Rješenje. Uredimo lijevu i desnu stranu date jednakosti tako da se vidi šta je imaginarni, a šta realni dio.

$$2+i(5\,x-3\,y)=(3\,x-5\,y)+14\,i.$$

Odavde, na osnovu jednakosti dva kompleksna broja, dobijamo:

$$3x-5y=2$$
$$5x-3y=14$$
$$x=4,\quad y=2.$$

262.

Dati su kompleksni brojevi $z_1=\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}$ i $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+i$. Odrediti realni parametar iz uslova $z_1=z_2$.

Rješenje. Ako za date kompleksne brojeve z_1 i z_2 vrijedi relacija $z_1=z_2$, onda je $\operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)$ i $\operatorname{Im}(z_1)=\operatorname{Im}(z_2)$.

Traženi parametar t odredićemo iz relacije:

$$\operatorname{Im}(z_1)=\operatorname{Im}(z_2)$$
$$\sin\frac{t}{2}=1$$
$$\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\qquad k\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$$
$$t=\pi+4k\pi.$$

Provjeriti da je za $t=\pi+4k$ ispunjen i uslov $\operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)$.

Kompleksan broj je jednak nuli ako, i samo ako, je jednak nuli njegov realni imaginarni dio, tj.

$$(x+iy=0)\Leftrightarrow(x=0,\ y=0).$$

263.

Odrediti nepoznate x i y iz jednačine

$$x+iy=2+i.$$

Rješenje.

$$x+iy=2+i$$
$$(x-2)+i(y-1)=0.$$

Kompleksan broj je jednak nuli, ako mu je istovremeno $\operatorname{Re}(z)=0$ i $\operatorname{Im}(z)=0$, tj.

$$x-2=0\ \Rightarrow\ x=2$$
$$y-1=0\ \Rightarrow\ y=1.$$

Kompleksni brojevi $z=a+bi$ i $\bar{z}=a-bi$ koji se razlikuju samo u znaku imaginarnog dijela, nazivaju se *konjugovano* (spregnuto) *kompleksni brojevi.*

264.

Za kompleksni broj $z=2+3i$ konjugovano kompleksni je $\bar{z}=2-3i$, dok je pak kompleksnom broju $z=-2-5i$ konjugovano kompleksni $\bar{z}=-2+5i$.

Pod apsolutnom vrijednošću ili ***modulom*** kompleksnog broja $z=a+bi$, podrazumijevamo nenegativan korijen iz zbira kvadrata realnog i imaginarnog dijela, tj.

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

U slučaju $b=0$ dobijamo da je apsolutna vrijednost $|a|$ realnog broja a jednaka pozitivnom korijenu iz a^2, tj.

$$|a|=\sqrt{a^2},$$

a to znači da je jednaka a za $a>0$ i jednaka $-a$ za $a<0$, što se slaže s pojmom apsolutne vrijednosti za realne brojeve.

265.

Naći modul kompleksnog broja $z=3-4i$.

Rješenje.

$$|z|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

266.

Odrediti kompleksni broj $z=a+bi$ koji zadovoljava jednačinu:

$$|z|+z=2+i.$$

Rješenje. Pošto je $z=a+bi$ to je $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, pa je:

$$\sqrt{a^2+b^2}+a+bi=2+i$$
$$(\sqrt{a^2+b^2}+a)+bi=2+i.$$

Na osnovu jednakosti dva kompleksna broja imamo da je:

$$\sqrt{a^2+b^2}+a=2$$
$$b=1$$

Uvrstimo li $b=1$ u jednačinu $\sqrt{a^2+b^2}+a=2$ dobićemo:

$$\sqrt{a^2+1}+a=2$$

$\sqrt{a^2+1}=2-a,$ kvadriramo li lijevu i desnu stranu, uz uslov da je $2-a\geqslant 0$,

$$a^2+1=4-4a+a^2$$

$$4a = 3$$

$$a = \frac{3}{4}.$$

Prema tome, naš traženi kompleksni broj $z = a + bi$ je

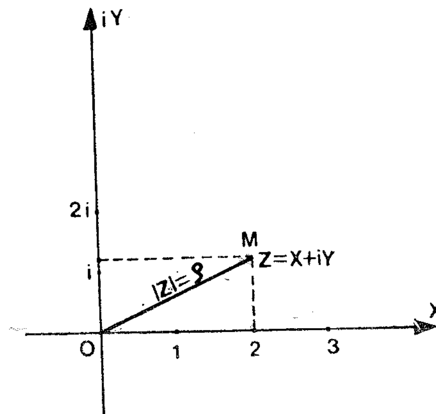
$$z = \frac{3}{4} + i.$$

Ravan u kojoj je smješten koordinatni sistem XOY, kod koga je X osa uzeta za realnu osu, Y za imaginarnu osu, naziva se *kompleksna ravan* ili *Gausova ravan.*

U ovako definisanoj ravni svakoj tački odgovara jedan, i samo jedan kompleksan broj, i obrnuto, svakom kompleksnom broju odgovara jedna, i samo jedna, tačka u kompleksnoj ravni.

Sa slike 1. se vidi da je udaljenost tačke M od koordinatnog početka apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja $z = x + iy$, tj.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Sl. 1.

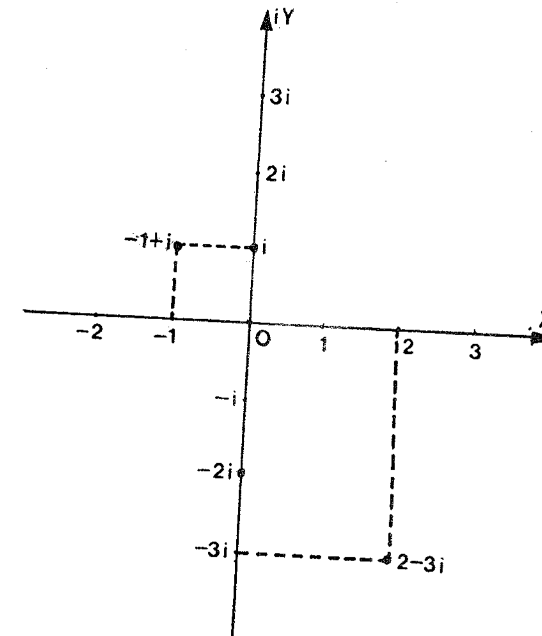
Ugao φ koji poteg OM zaklapa sa realnom osom naziva se *argument* kompleksnog broja i vrijednost mu je $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ (k je cio broj), gdje je φ_0 onaj ugao koji odgovara tački M, a koji se nalazi u razmaku $[-\pi, +\pi]$. Argument kompleksnog broja z se često označuje sa $\operatorname{Arg} z$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. φ_0 se zove *glavna vrijednost argumenta* i označuje se sa $\arg z$, $\varphi_0 = \arg z$.

267.

Naći tačke u kompleksnoj ravni koje odgovaraju kompleksnim brojevima:

a) i, b) $-2i$, c) $-1+i$, d) $2-3i$.

Rješenje. (Sl. 2).



Sl. 2.

268.

Jednakostrani trougao upisan je u krug poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku. Ako mu jedan vrh leži na imaginarnoj osi, odrediti kompleksne brojeve koji odgovaraju ostalim vrhovima.

Rješenje. (Sl. 3).

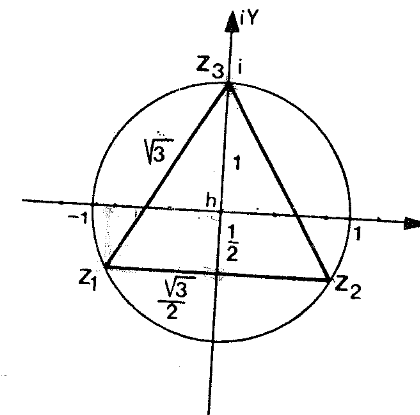
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{3}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad a = \sqrt{3}$$

Dakle, imamo da je:

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_3 = i.$$



Sl. 3.

269.

Odrediti kompleksne brojeve koji odgovaraju vrhovima pravilnog šestougla upisanog u krug poluprečnika jedan, sa središtem u koordinatnom početku, ako se jedan vrh nalazi u tački jedan.

Rješenje. (Sl. 4)

$a=1$

$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1=1$

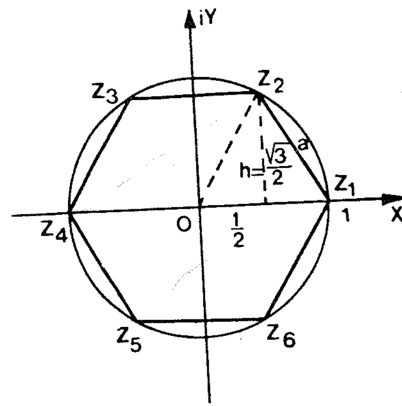
$z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_4=-1$

$z_5=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_6=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$



Sl. 4.

270.

Odrediti imaginaran broj koji odgovara tački iz koje se rastojanje između tačke $z_1=3$ i $z_2=-1$ vidi pod pravim uglom.

Rješenje. Znajući da se imaginarni brojevi nalaze na imaginarnoj osi, to će se traženi imaginarni broj, iz koga se rastojanje između tačaka $z_1=3$ i $z_2=-1$ vidi pod pravim uglom, nalaziti na imaginarnoj osi. Neka on pripada nekoj tački $c(0, \beta)$ na imaginarnoj osi. Sa slike 5. se vidi da postoje takve dvije tačke. Tada, posmatrajući sliku, dobijamo da je:

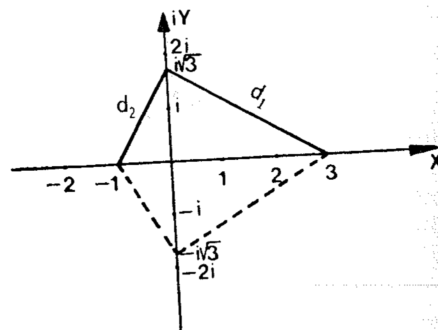
$d_1=\sqrt{3^2+\beta^2}$

$d_2=\sqrt{(-1)^2+\beta^2}$

$d_1^2+d_2^2=16$

$9+\beta^2+1+\beta^2=16$

$\beta=\pm\sqrt{3}$



Sl. 5.

Prema tome, traženi imaginarni broj, koji odgovara tački iz koje se vide tačke $z_1=3$ i $z_2=-1$ pod pravim uglom, je $\pm i\sqrt{3}$. Kao što se vidi, postoje takva dva broja.

4.3. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kompleksnom broju se može dati jedan drugi oblik koji će nam omogućiti da potpunije sagledamo operacije s kompleksnim brojevima.

Iz slike 6. vidimo da je:

$x=\rho\cos\varphi$

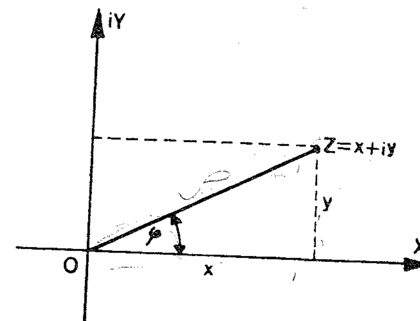
$y=\rho\sin\varphi$

pa je:

$z=x+iy=\rho\cos\varphi+\rho i\sin\varphi$

$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$

Dobijeni oblik kompleksnog broja zove se *trigonometrijski.*



Sl. 6.

Relacije koje potpuno utvrđuju trigonometrijski oblik pomoću algebarskog su:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho},\qquad \sin\varphi=\frac{y}{\rho},\qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1}$$

Iz relacija (1), međutim, argument φ nije jednoznačno određen. Ako je φ_0 glavna vrijednost argumenta određenog sa (1), ostale su tada $\varphi_0+2k\pi$.

Primjer. Kompleksni broj $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ je dat u trigonometrijskom obliku, gdje je modul $\rho=\sqrt{2}$ i argument $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

271.

Kompleksni broj $z=1-i$ dat u algebarskom obliku napisati u trigonometrijskom obliku.

Rješenje. Kompleksni broj dat u trigonometrijskom obliku glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Da bismo ga odredili, treba mu odrediti modul ρ i argument φ:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0,\quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0.$$

Pošto su istovremeno $\cos\varphi>0$ i $\sin\varphi<0$ samo u četvrtom kvadrantu, to znači da argument φ datog kompleksnog broja treba tražiti u četvrtom kvadrantu, tj. iz:

$$\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots).$$

Prema tome, trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z=1-i$ glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right] \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

Iz definicije trigonometrijskog oblika kompleksnog broja slijedi da su dva kompleksna broja:

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

i

$$z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

jednaka ako su im moduli ρ_1 i ρ_2 jednaki, tj. $\rho_1=\rho_2$, a argumenti se razlikuju za $2k\pi$, $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$, tj.

$$\varphi_1=\varphi_2+2k\pi.$$

272.

Kompleksne brojeve:

a) $z=1+i\sqrt{3}$, c) $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$,

b) $z=\sqrt{3}-i$, d) $z=1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha$

date u algebarskom obliku, napisati u trigonometrijskom obliku.

Rješenje.

a) $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{1}{2}>0, \qquad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0.$$

Pošto su $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ istovremeno pozitivni samo u prvom kvadrantu, to slijedi da će se argument φ nalaziti u prvom kvadrantu, tj.:

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi, \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

Prema tome, trigonometrijski oblik datog kompleksnog broja glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right], \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

b) $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=-\frac{1}{2}<0.$$

Pošto su istovremeno $\cos\varphi>0$ a $\sin\varphi<0$ samo u četvrtom kvadrantu, to će se argument nalaziti u četvrtom kvadrantu, tj. naći ćemo ga iz:

$$\sin\varphi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

Prema tome, trigonometrijski oblik datog kompleksnog broja glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right].$$

c) $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2}=$

$$=\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sqrt{1-2\cos\alpha+1}=$$

$$=\sqrt{2-2\cos\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=$$

$$=\sqrt{2\cdot2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|.$$

Pošto vrijednost $\sin\frac{\alpha}{2}$ može biti i pozitivna i negativna, a sve u zavisnosti od kvadranta u kome se posmatra $\sin\frac{\alpha}{2}$, to mogu nastupiti sljedeća dva slučaja:

1) U intervalu $\left(0<\frac{\alpha}{2}<\pi\right)$ je $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, pa je $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sin\frac{\alpha}{2}$.

Prema tome je:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{1-\cos\alpha}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\frac{\sin\alpha}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Dakle, trigonometrijski oblik datog kompleksnog broja za $\left(0<\frac{\alpha}{2}<\pi\right)$ glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) U intervalu $\left(\pi<\frac{\alpha}{2}<2\pi\right)$ je $\sin\frac{\alpha}{2}<0$, pa je $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=-\sin\frac{\alpha}{2}$.

Prema tome je:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{1-\cos\alpha}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{-2\sin\frac{\alpha}{2}}=-\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right)$$

$$\sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\frac{\sin\alpha}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{-2\sin\frac{\alpha}{2}}=-\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right).$$

Dakle, trigonometrijski oblik datog kompleksnog broja za $\left(\pi<\frac{\alpha}{2}<2\pi\right)$ glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\cdot\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right)+i\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right)\right].$$

d) $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{|\cos\alpha|}$

Pošto $\cos\alpha$ može biti i pozitivno i negativno, a sve u zavisnosti od intervala u kome se posmatra $\cos\alpha$, to mogu nastupiti dva slučaja:

1. Pošto je u intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\alpha>0$ to je:

$$|\cos\alpha|=\cos\alpha.$$

Prema tome je:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=|\cos\alpha|=\cos\alpha,\qquad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\operatorname{tg}\alpha\cdot|\cos\alpha|=\sin\alpha.$$

Prema tome, dati kompleksni broj u trigonometrijskom obliku za $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

2) Pošto je u intervalu $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos\alpha<0$, to je:

$$|\cos\alpha|=-\cos\alpha.$$

Prema tome je:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha=\cos(\alpha-\pi)$$

$$\sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\operatorname{tg}\alpha\cdot|\cos\alpha|=-\sin\alpha=\sin(\alpha-\pi).$$

Dakle, trigonometrijski oblik datog kompleksnog broja za $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$ glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{1}{|\cos\alpha|}[\cos(\alpha-\pi)+i\sin(\alpha-\pi)].$$

273.

Naći realan i imaginaran dio broja z ako je:

$$\rho=\sqrt{2}\quad\text{i}\quad\varphi=\frac{\pi}{4}$$

Rješenje.

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i.$$

Iz dobijenog kompleksnog broja $z=1+i$ vidi se da je: $\mathrm{Re}(z)=1$ i $\mathrm{Im}(z)=1$.

274. ???

Napisati u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve a, b, c, d, ako njihovi argumenti čine aritmetičku, a moduli geometrijsku progresiju i ako je $a=\sqrt{2}$ i $d=4i$.

Rješenje. Kompleksni brojevi a, b, c, d, u trigonometrijskom obliku će glasiti:

$$a=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$
$$b=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$c=\rho_3(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3)$$
$$d=\rho_4(\cos\varphi_4+i\sin\varphi_4).$$

Da bismo ih odredili, treba naći njihove module $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ i argumente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Iz teksta zadatka proizilazi.

$$a=\sqrt{2} \Rightarrow \rho_1=\sqrt{2} \quad \varphi_1=0+2k\pi=2k\pi$$

$$d=4i \Rightarrow \rho_4=4 \quad \varphi_4=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

S obzirom da argumenti kompleksnih brojeva a,b,c,d, čine aritmetičku progresiju, to je:

$$\varphi_2-\varphi_1=\varphi_3-\varphi_2=\varphi_4-\varphi_3=\vartheta.$$

Odavde slijedi da je:

$$\varphi_2=\vartheta+\varphi_1$$

$$\varphi_3=\vartheta+\varphi_2=\vartheta+\vartheta+\varphi_1=2\vartheta+\varphi_1$$

$$\varphi_4=\vartheta+\varphi_3=\vartheta+2\vartheta+\varphi_1=3\vartheta+\varphi_1.$$

Iz ove tri relacije, vodeći računa da je $\varphi_1=2k\pi$ i $\varphi_4=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, dobijamo:

$$\varphi_2=\vartheta+2k\pi$$

$$\varphi_3=2\vartheta+2k\pi$$

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi=3\vartheta+2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}=3\vartheta, \text{ odavde je } \vartheta=\frac{\pi}{6} \quad \text{pa je}$$

$$\varphi_2=\frac{\pi}{6}+2k\pi, \quad \varphi_3=\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

Međutim, da moduli čine geometrijsku progresiju znači da je:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\rho_3}{\rho_2}=\frac{\rho_4}{\rho_3}=\lambda \quad \text{odakle je:}$$

$$\rho_2=\lambda\rho_1 \Rightarrow \rho_2=\lambda\sqrt{2}$$

$$\rho_3=\lambda\rho_2 \Rightarrow \rho_3=\lambda^2\sqrt{2}$$

$$\rho_4=\lambda\rho_3 \Rightarrow \rho_4=\lambda^3\sqrt{2} \Rightarrow 4=\lambda^3\sqrt{2} \Rightarrow \lambda^3=\frac{4}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}$$

$$\lambda=\sqrt{2}.$$

Onda je:

$$\rho_2=\lambda\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$$

$$\rho_3=\lambda^2\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

Prema tome, trigonometrijski oblik kompleksnih brojeva, a,b,c,d, glasi:

$$a=\sqrt{2}$$

$$b=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right]$$

$$c=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$$

$$d=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots).$$

4.4. Ojlerov ili eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Koristeći Ojlerov obrazac

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi},$$

kompleksni broj se može napisati i u obliku:

$$z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi},$$

tj.

$$z=\rho e^{i\varphi}$$

koji se zove *Ojlerov oblik* kompleksnog broja.

275.

Kompleksni broj $z=-1-i$ napisati u Ojlerovom obliku $z=\rho e^{i\varphi}$.

Rješenje.

Da bismo dati kompleksni broj napisali u Ojlerovom obliku, potrebno je odrediti modul ρ i argument φ, tj.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0.$$

Pošto su $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ istovremeno negativni samo u trećem kvadrantu, to iz:

$$\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

Prema tome, Ojlerov oblik kompleksnog broja $z=-1-i$ glasi:

$$z=\rho e^{i\varphi}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)}, \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

4.5. Računske operacije s kompleksnim brojevima

Upoznali smo pojam i oblike kompleksnih brojeva. Da bismo ih mogli uvrstiti u red brojeva, nije dovoljno da ih samo poznajemo, već je potrebno znati i računske radnje s njima. Pri definiciji operacija s kompleksnim brojevima naići ćemo na vrlo zanimljive, često neočekivane rezultate koji će nam upravo otkriti pravi smisao kompleksnih brojeva, kao i ogromnu korist od njih.

4.5.1. *Sabiranje i oduzimanje kompleksnih brojeva*

Ako su data dva kompleksna broja u algebarskom obliku:

$$z_1 = a_1 + ib_1$$

$$z_2 = a_2 + ib_2, \text{ tada je:}$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

Napominjemo da pravilo sabiranja vrijedi i za više kompleksnih brojeva.

276.

Naći zbir kompleksnih brojeva:

a) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 5 - 8i$

b) $z_1 = -3 - 4i$, $z_2 = 8 + 2i$

c) $z_1 = 1{,}8 + i$, $z_2 = 2{,}4 - 3i$, $z_3 = 1 + 2{,}4i$.

Rješenje.

a) $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (5 - 8i) = (3 + 5) + (2 - 8)i = 8 - 6i$,

b) $z_1 + z_2 = (-3 - 4i) + (8 + 2i) = (-3 + 8) + i(-4 + 2) = 5 - 2i$

c) $z_1 + z_2 + z_3 = (1{,}8 + i) + (2{,}4 - 3i) + (1 + 2{,}4i) =$
$= (1{,}8 + 2{,}4 + 1) + i(1 - 3 + 2{,}4) = 5{,}2 + 0{,}4i.$

277.

Naći razliku kompleksnih brojeva:

a) $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = -7 + 9i$

b) $z_1 = 2\sin\frac{3\pi}{4} - 3i\cos\frac{5\pi}{4}$, $z_2 = 4\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $z_1 = 2\log_{(3)} 6 - i\log_{(6)} 27$, $z_2 = \log_{(3)} 108 + i\log_{(6)} 8$.

Rješenje.

a) $z_1 - z_2 = (4 - 5i) - (-7 + 9i) = 11 - 14i$

b) $z_1 = 2\sin\frac{3\pi}{4} - 3i\cos\frac{5\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$,

$z_2 = 4\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$,

$z_1 - z_2 = \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right) - \left(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = \sqrt{2}(-1 + 2i).$

c) $z_1 - z_2 = (2\log_{(3)} 6 - i\log_{(6)} 27) - (\log_{(3)} 108 + i\log_{(6)} 8) =$
$= (2\log_{(3)} 6 - \log_{(3)} 108) - i(\log_{(6)} 27 + \log_{(6)} 8) =$
$= (\log_{(3)} 6^2 - \log_{(3)} 108) - i(\log_{(6)} 27 + \log_{(6)} 8) =$
$= \log_{(3)} \frac{36}{108} - i\log_{(6)}(27\cdot 8) = \log_{(3)} \frac{1}{3} - i\log_{(6)} 216 =$
$= \log_{(3)} 3^{-1} - i\log_{(6)} 6^3 = -\log_{(3)} 3 - 3i\log_{(6)} 6 = -1 - 3i.$

4.5.2. *Množenje kompleksnih brojeva*

Ako su kompleksni brojevi dati u algebarskom obliku:

$$z_1 = a_1 + ib_1$$

$$z_2 = a_2 + ib_2,$$

onda se oni množe isto kao binom s binom, tj.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Međutim, ako su kompleksni brojevi dati u trigonometrijskom, odnosno Ojlerovom obliku, tj.

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2},$$

tada je njihov proizvod jednak:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

278.

Naći proizvod sljedećih kompleksnih brojeva:

a) $z_1 = -7 + 2i$, $z_2 = 6 + 3i$

b) $z_1 = \sqrt{a} + i\sqrt{b}$, $z_2 = \sqrt{a} - i\sqrt{b}$.

Rješenje.

a) $z_1 \cdot z_2 = (-7+2i) \cdot (6+3i) = -42+12i-21i+6i^2 = -48-9i,$

b) $z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b}) = a+i\sqrt{ab}-i\sqrt{ab}-i^2 b = a+b.$

Napomena. Za konjugovano kompleksne brojeve $z=a+ib$ i $\bar{z}=a-ib$ vrijedi relacija

$$z \cdot \bar{z} = a^2+b^2.$$

Kao što se vidi, proizvod kompleksnog broja i njemu konjugovano kompleksnog broja jednak je zbiru kvadrata realnog i imaginarnog dijela tih kompleksnih brojeva.

279.

Naći proizvod kompleksnog broja $z=2+3i$ i njemu konjugovano kompleksnog broja $\bar{z}=2-3i$.

Rješenje.

$$z \cdot \bar{z} = (2+3i)(2-3i) = 2^2+(-3)^2 = 4+9 = 13.$$

280.

Naći proizvod kompleksnih brojeva:

a) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$

b) $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_2 = \frac{1}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$

Rješenje.

a) $z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= 6\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{6}\right) =$

$= 6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 6i$

b) $z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= \frac{1}{8}\left(\cos\frac{4\pi-\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi-\pi}{6}\right) =$

$= \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}i.$

281.

Rastaviti na kompleksne faktore sljedeće izraze:

a) a^2+b^2, b) $16+25$, c) $a+2$.

Rješenje.

a) $a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi)$

b) $16+25 = (4+5i)(4-5i)$

c) $a+2 = (\sqrt{a}+i\sqrt{2})(\sqrt{a}-i\sqrt{2}).$

4.5.3. *Dijeljenje kompleksnih brojeva*

Ako su kompleksni brojevi dati u algebarskom obliku:

$z_1 = a_1+ib_1$

$z_2 = a_2+ib_2 \neq 0,$

onda je njihov količnik:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\cdot\frac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Međutim, ako su kompleksni brojevi dati u trigonometrijskom i Ojlerovom obliku, tj.

$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2} \neq 0,$

tada je njihov količnik jednak:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

282.

Naći količnik kompleksnih brojeva:

a) $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-7i$

b) $z_1 = 1+i$, $z_2 = i$

c) $z_1 = 5-i\sqrt{2}$, $z_2 = 1+i\sqrt{2}.$

Rješenje.

a) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{2+3i}{5-7i}\cdot\frac{5+7i}{5+7i}=\frac{10+15i+14i+21i^2}{5^2+7^2}=$

$=\frac{-11}{74}+\frac{29}{74}i$

b) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i+i^2}{i^2}=\frac{i-1}{-1}=1-i$

c) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}=\frac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\cdot\frac{1-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}=\frac{5-i\sqrt{2}-5i\sqrt{2}+2i^2}{1^2+(\sqrt{2})^2}=$

$=\frac{5-6i\sqrt{2}-2}{1+2}=\frac{3-6i\sqrt{2}}{3}=1-2i\sqrt{2}.$

283.

Naći količnik kompleksnih brojeva:

a) $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

b) $z_1=6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Rješenje.

a) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$

$=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{3\pi-\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi-\pi}{6}\right)=$

$=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}.$

b) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$

$=2\left(\cos\frac{\pi-4\pi}{6}+i\sin\frac{\pi-4\pi}{6}\right)=$

$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)=-2i.$

284.

Izvršiti naznačene računske operacije:

a) $\frac{1-3i}{1+i}-\frac{i}{2+i}$, b) $\frac{1+i}{2+i}\cdot(3+2i)$, c) $\frac{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}{3-4i}$,

d) $\frac{i}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$, e) $\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

Rješenje.

a) $\frac{1-3i}{1+i}-\frac{i}{2+i}=\frac{(1-3i)(2+i)-i(1+i)}{(1+i)(2+i)}=$

$=\frac{2-6i+i-3i^2-i-i^2}{2+2i+i+i^2}=\frac{2-6i+i+3-i+1}{2+2i+i-1}=$

$=\frac{6-6i}{1+3i}=\frac{6-6i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{6-6i-18i+18i^2}{1^2+3^2}=$

$=\frac{6-6i-18i-18}{1+9}=\frac{-12-24i}{10}=-\frac{6}{5}-\frac{12}{5}i.$

b) $\frac{1+i}{2+i}(3+2i)=\frac{3+3i+2i+2i^2}{2+i}=\frac{1+5i}{2+i}=\frac{1+5i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=$

$=\frac{2+10i-i-5i^2}{2^2+1^2}=\frac{7+9i}{5}=\frac{7}{5}+\frac{9}{5}i.$

c) $\frac{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}{3-4i}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{3-4i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}+3i+4i\sqrt{3}+4i^2}{3^2+4^2}=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}+3i+4i\sqrt{3}-4}{9+16}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(3\sqrt{3}-4)+i(3+4\sqrt{3})}{25}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-4}{50}+i\frac{3+4\sqrt{3}}{50}.$$

d) $$\frac{i}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\cdot\frac{i}{1+i\sqrt{3}}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=$$

$$=2\cdot\frac{i-i^2\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}=2\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

4.5.4. *Stepenovanje kompleksnih brojeva*

Ako je kompleksni broj dat u algebarskom obliku, onda se on stepenuje kao binom. To ne predstavlja veće teškoće ako je stepen 2 ili 3, međutim, ako je stepen veći od 3, onda se direktnom primjenom binomnog obrasca često komplikuje rad. Zato je preporučljivo, ako je stepen veći od 3, da se kompleksni broj prvo prevede u trigonometrijski oblik pa onda stepenuje.

Kompleksni broj dat u trigonometrijskom obliku

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

stepenuje se sa $n\in N$ tako što mu se modul ρ stepenuje sa n, a argument pomnoži sa n, tj.:

$$z^n=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (1)$$

Relacija (1) vrijedi i za svaki cijeli broj n. Ako se u (1) umjesto n stavi $-n$ dobija se:

$$z^{-n}=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-n}=\rho^{-n}[\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)]=$$
$$=\rho^{-n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)=\rho^{-n}e^{-in\varphi}.$$

Ako je u (1) modul $\rho=1$, dobija se *Moavrov obrazac* koji glasi:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Moavrov obrazac ima naročito veliku primjenu u matematici, a naročito u trigonometriji kod određivanja trigonometrijskih funkcija višestrukih argumenata.

285.

Izračunati z^2 i z^3 ako je $z=2-3i$.

Rješenje. $$z^2=(2-3i)^2=2^2+2\cdot2\cdot(-3i)+(-3i)^2=$$
$$=4-12i+9i^2=4-12i-9=-5-12i.$$
$$z^3=(2-3i)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot(-3i)+3\cdot2\cdot(-3i)^2+(-3i)^3=$$
$$=8-36i+54i^2-27i^3=8-36i-54+27i=-46-9i.$$

286.

Po Njutnovoj binomnoj formuli razviti izraz:

$$(a+bi)^6+(a-bi)^6.$$

Rješenje.

$$(a+ib)^6=a^6+6a^5bi+\binom{6}{2}a^4b^2i^2+\binom{6}{3}a^3b^3i^3+\binom{6}{4}a^2b^4i^4+$$
$$+\binom{6}{5}ab^5i^5+b^6i^6=a^6+6a^5bi-15a^4b^2-20a^3b^3i+$$
$$+15a^2b^4+6ab^5i-b^6.$$

$$(a-bi)^6=a^6-6a^5bi+\binom{6}{2}a^4b^2i^2-\binom{6}{3}a^3b^3i^3+\binom{6}{4}a^2b^4i^4-$$
$$-\binom{6}{5}ab^5i^5+b^6i^6=a^6-6a^5bi-15a^4b^2+20a^3b^3i+$$
$$+15a^2b^4-6ab^5i-b^6.$$

Prema tome je:

$$(a+bi)^6+(a-bi)^6=2a^6-30a^4b^2+30a^2b^4-2b^6.$$

287.

Izračunati $(1+i)^7$.

Rješenje.

Dati kompleksni broj $z=1+i$ treba prethodno prevesti u trigonometrijski oblik $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, tj.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0, \qquad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0.$$

Pošto su $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ istovremeno pozitivni samo u prvom kvadrantu, to slijedi da se argument φ nalazi u prvom kvadrantu, tj. iz

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

Prema tome, kompleksni broj $z=1+i$ u trigonometrijskom obliku glasi:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right].$$

10*

Dakle,

$$(1+i)^7=(\sqrt{2})^7\left[\cos 7\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin 7\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right].$$

288.

Predstaviti kompleksni broj $z=-i$ u trigonometrijskom obliku, pa onda naći z^5.

Rješenje.

Kompleksni broj $z=-i$ je onaj kompleksni broj kod koga je:

$$\operatorname{Re}(z)=0,\ \operatorname{Im}(z)=-1,\ \text{pa je: } \rho=1 \text{ i } \varphi=\frac{3\pi}{2}.$$

Prema tome je:

$$z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2},$$

dok je:

$$z^5=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^5=\cos\frac{15\pi}{2}+i\sin\frac{15\pi}{2}=$$

$$=\cos\left(6\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

289.

Primjenom Moavrovog obrasca pokazati da je:

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Rješenje.

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos^2\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi+$$
$$+i^2\sin^2\varphi=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+2i\sin\varphi\cos\varphi. \quad (1)$$

Sa druge pak strane primjenom Moavrovog obrasca dobijamo da je:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi \quad (2)$$

Pošto su lijeve strane u (1) i (2) jednake, onda su jednake i desne pa je:

$$\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+2i\sin\varphi\cos\varphi.$$

Na osnovu pravila o jednakosti dva kompleksna broja dobijamo da je:

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi.$$

290.

Metodom matematičke indukcije dokazati Moavrovu formulu:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$$

gdje je n prirodan broj.

Rješenje. Za $n=1$ formula je očigledno ispunjena. Pretpostavimo da je ona ispunjena i za $n=k\geqslant 1$, tj.

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k=\cos k\varphi+i\sin k\varphi,$$

i dokažimo da je ona ispunjena i za $n=k+1$, tj.

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{k+1}=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$=(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$=\cos(k\varphi+\varphi)+i\sin(k\varphi+\varphi)=$$
$$=\cos(k+1)\varphi+i\sin(k+1)\varphi.$$

Ovim je formula dokazana. Međutim, može se dokazati da Moavrova formula vrijedi i za svaki cijeli negativan broj.

291.

Dokazati da je $(1+i)^{4k}$ realan, a $(1+i)^{4k+2}$ imaginaran broj, ako je k prirodan broj.

Rješenje. Napišimo prethodno $z=1+i$ u trigonometrijskom obliku:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

tada je:

$$(1+i)^{4k}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{4k}=2^{2k}(\cos k\pi+i\sin k\pi)=$$
$$=2^{2k}\cos k\pi=(-1)^k 2^{2k},$$

jer je za $k\in\mathbf{N}$, $\sin k\pi=0$ dok je $\cos k\pi=\pm 1$ u zavisnosti da li je k parno ili neparno.

$$(1+i)^{4k+2}=(1+i)^{4k}\cdot(1+i)^2=$$
$$=(-1)^k\cdot 2^{2k}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=$$
$$=(-1)^k\cdot 2^{2k+1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\cdot 2^{2k+1}\cdot i,$$

jer je $\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \sin\frac{\pi}{2}=1.$

292.

Za $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ izračunati izraz:

$$(az+bz^2)(az^2+bz).$$

Rješenje.

$$z^2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=$$

$$=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

$$z^4=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^4=\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}=$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prema tome je:

$$(az+bz^2)(az^2+bz)=a^2z^3+abz^4+abz^2+b^2z^3=$$

$$=a^2+ab\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+ab\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+b^2=$$

$$=a^2-ab+b^2.$$

293.

Provjeriti identitet:

$$(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n\equiv 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right),$$

gdje je n prirodan broj, a φ realan.

Rješenje.

$$(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=[(1+\cos\varphi)+i\sin\varphi]^n=$$

$$=\left[2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]^n=$$

$$=\left[2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]^n=$$

$$=2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right).$$

294.

Primjenom Moavrovog obrasca dokazati da za svaki prirodan broj n i svaki realan broj φ za koji je $\cos\varphi\neq 0$ i $\cos n\varphi\neq 0$:

$$\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^n=\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}.$$

Dokaz.

$$\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^n=\left[\frac{1+i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1-i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}\right]^n=\left[\frac{\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos\varphi}}\right]^n=$$

$$=\left(\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}\right)^n=\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}{\cos n\varphi-i\sin n\varphi}=$$

$$=\frac{\cos n\varphi\left(1+i\frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi}\right)}{\cos\varphi\left(1-i\frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi}\right)}=\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}.$$

295.

Dokazati identitet:

$$(1+i)^n\equiv 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Rješenje. Potrebno je kompleksni broj $z=1+i$ napisati u trigonometrijskom obliku, pa onda primijeniti Moavrov obrazac.

Pošto je: $\rho=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, to kompleksni broj $z=1+i$ u trigonometrijskom obliku glasi:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Prema tome je:

$$(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

296.

Dokazati identitet:

$$(\sqrt{3}-i)^n \equiv 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$$

a) Moavrovim obrascem,

b) Metodom matematičke indukcije.

Rješenje.

a) Potrebno je da kompleksni broj $z=\sqrt{3}-i$ napišemo u trigonometrijskom obliku, pa onda na njega primijenimo Moavrov obrazac:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=-\frac{1}{2}<0$$

$$\sin\varphi=-\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow \varphi_0=-\frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$(\sqrt{3}-i)^n=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$$

b)

1. Za $n=1$ uslov je ispunjen, jer je:

$$(\sqrt{3}-i)^1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Ako sada pretpostavimo da uslov vrijedi za $n=k\geqslant 1$, tj. da je:

$$(\sqrt{3}-i)^k=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)$$

i dokažemo da vrijedi za $n=k+1$, onda je tvrdnja tačna i za proizvoljno n:

$$(\sqrt{3}-i)^{k+1}=(\sqrt{3}-i)^k(\sqrt{3}-i)=$$

$$=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=2^{k+1}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{6}-i\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right).$$

297.

Dokazati da je:

$$(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right].$$

Rješenje. Pošto je:

$$(1+i\sqrt{3})=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{i}$$

$$(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

to je:

$$(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\right]=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right].$$

298.

Izračunati:

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}, \text{ gdje je } n\in\mathbf{N}.$$

Rješenje.

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n\cdot(1-i)^{-2}}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\cdot(1-i)^2=$$

$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^n(1-2i+i^2)=\left(\frac{1+2i+i^2}{1+1}\right)^n\cdot(-2i)=$$

$$=i^n\cdot(-2i)=-2i^{n+1}.$$

Ako je:

1) $n+1$ oblika $4k$ onda je $-2\,i^{n+1}=-2$

2) $n+1$ oblika $4k+1$ onda je $-2\,i^{n+1}=-2\,i$

3) $n+1$ oblika $4k+2$ onda je $-2\,i^{n+1}=2$

4) $n+1$ oblika $4k+3$ onda je $-2\,i^{n+1}=2\,i$,

pri čemu je $k=1, 2, 3, \ldots$

299.

Dokazati da je u razvoju binoma $(1+i)^{4k+2}$ suma članova koji se nalaze na neparnim mjestima jednaka nuli.

Rješenje. Dati binom transformišemo na sljedeći način:

$$(1+i)^{4k+2}=[(1+i)^2]^{2k+1}=(2\,i)^{2k+1}$$

Jasno je, da će imaginarna jedinica i na neparnom stepenu poprimiti vrijednosti i ili $-i$. U tom slučaju, u datom razvoju su ostali samo imaginarni sabirci, dok su se svi realni sabirci poništili.

Pošto se iz transformacije vidi da realni članovi razvoja stoje na neparnom mjestu, to je zbir članova razvoja koji stoje na neparnom mjestu jednak nuli.

300.

Naći šesti član geometrijske progresije, čiji je prvi član $\frac{1}{i}$, ako je njen količnik kompleksni broj $(1+i)$.

Rješenje. Imamo da je šesti član geometrijske progresije jednak.

$$a_6=a_1\,q^5=\frac{1}{i}(1+i)^5=\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}(1+5\,i+10\,i^2+10i^3+5\,i^4+i^5)=$$

$$=-i(1+5\,i-10-10\,i+5+i)=-i(-4-4\,i)=4+4\,i.$$ greška $4i+4i^2=4i-4$ $i^2=-1$

301.

Naći sedmi član geometrijske progresije, čiji je količnik $\left(1+\frac{1}{i}\right)$, a prvi član je i.

Rješenje. Traženi sedmi član geometrijske progresije glasi:

$$a_7=a_1\,q^6=i\left(1+\frac{1}{i}\right)^6=i\,(1-i)^6.$$

Da bismo kompleksni broj $(1-i)$ lakše stepenovali, prevedimo ga u trigonometrijski oblik, gdje je:

$$\rho=\sqrt{2},\ \text{a}\ \varphi=-\frac{\pi}{4}.$$

$$a_7=i\,(1-i)^6=i\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6=$$

$$=8\,i\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=8\,i\,[0-i(-1)]=8\,i^2=-8.$$

4.5.5. *Korjenovanje kompleksnih brojeva*

Ako je kompleksan broj dat u algebarskom obliku, pa iz njega treba izvaditi n-ti korijen, gdje je $n\in\mathbf{N}$, onda se on prethodno prevede u trigonometrijski oblik, pa tek onda korjenuje.

Naći n-ti korijen kompleksnog broja:

$$z=\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

gdje je $n\in\mathbf{N}$ i φ glavna vrijednost argumenta od z, znači naći kompleksan broj:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1)$$

Prema tome, n-ti korijen kompleksnog broja $z\neq0$ ima n različitih vrijednosti jer za svaki cio broj $k\neq0, 1, 2, \ldots, n-1$ dobijamo opet iste vrijednosti korijena.

302.

Izračunati $\sqrt[3]{i}$.

Rješenje.

Prethodno prevedemo kompleksni broj $z=i$ u trigonometrijski oblik. Očigledno da je $\rho=1$ i $\varphi=\frac{\pi}{2}$, te ako primijenimo obrazac:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1),$$

dobićemo da je:

$$\sqrt[3]{i}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\qquad (k=0,\ 1,\ 2).$$

Ako je:

1) $n+1$ oblika $4k$ onda je $-2\,i^{n+1}=-2$

2) $n+1$ oblika $4k+1$ onda je $-2\,i^{n+1}=-2\,i$

3) $n+1$ oblika $4k+2$ onda je $-2\,i^{n+1}=2$

4) $n+1$ oblika $4k+3$ onda je $-2\,i^{n+1}=2\,i$,

pri čemu je $k=1, 2, 3, \ldots$

299.

Dokazati da je u razvoju binoma $(1+i)^{4k+2}$ suma članova koji se nalaze na neparnim mjestima jednaka nuli.

Rješenje. Dati binom transformišemo na sljedeći način:

$$(1+i)^{4k+2}=[(1+i)^2]^{2k+1}=(2\,i)^{2k+1}$$

Jasno je, da će imaginarna jedinica i na neparnom stepenu poprimiti vrijednosti i ili $-i$. U tom slučaju, u datom razvoju su ostali samo imaginarni sabirci, dok su se svi realni sabirci poništili.

Pošto se iz transformacije vidi da realni članovi razvoja stoje na neparnom mjestu, to je zbir članova razvoja koji stoje na neparnom mjestu jednak nuli.

300.

Naći šesti član geometrijske progresije, čiji je prvi član $\frac{1}{i}$, ako je njen količnik kompleksni broj $(1+i)$.

Rješenje. Imamo da je šesti član geometrijske progresije jednak.

$$a_6=a_1\,q^5=\frac{1}{i}(1+i)^5=\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}(1+5\,i+10\,i^2+10i^3+5\,i^4+i^5)=$$

$$=-i(1+5\,i-10-10\,i+5+i)=-i(-4-4\,i)=4+4\,i.$$ greška $= 4i + 4i^2 = 4i - 4$

301.

Naći sedmi član geometrijske progresije, čiji je količnik $\left(1+\frac{1}{i}\right)$, a prvi član je i.

Rješenje. Traženi sedmi član geometrijske progresije glasi:

$$a_7=a_1\,q^6=i\left(1+\frac{1}{i}\right)^6=i\,(1-i)^6.$$

Da bismo kompleksni broj $(1-i)$ lakše stepenovali, prevedimo ga u trigonometrijski oblik, gdje je:

$$\rho=\sqrt{2},\ \text{a}\ \varphi=-\frac{\pi}{4}.$$

$$a_7=i\,(1-i)^6=i\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6=$$

$$=8\,i\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=8\,i\,[0-i\,(-1)]=8\,i^2=-8.$$

4.5.5. *Korjenovanje kompleksnih brojeva*

Ako je kompleksan broj dat u algebarskom obliku, pa iz njega treba izvaditi n-ti korijen, gdje je $n\in\mathbf{N}$, onda se on prethodno prevede u trigonometrijski oblik, pa tek onda korjenuje.

Naći n-ti korijen kompleksnog broja:

$$z=\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

gdje je $n\in\mathbf{N}$ i φ glavna vrijednost argumenta od z, znači naći kompleksan broj:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1)$$

Prema tome, n-ti korijen kompleksnog broja $z\neq 0$ ima n različitih vrijednosti jer za svaki cio broj $k\neq 0, 1, 2, \ldots, n-1$ dobijamo opet iste vrijednosti korijena.

302.

Izračunati $\sqrt[3]{i}$.

Rješenje.

Prethodno prevedemo kompleksni broj $z=i$ u trigonometrijski oblik. Očigledno da je $\rho=1$ i $\varphi=\frac{\pi}{2}$, te ako primijenimo obrazac:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1),$$

dobićemo da je:

$$\sqrt[3]{i}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\qquad (k=0,\ 1,\ 2).$$

1) za $k=0$, $z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

2) za $k=1$, $z_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i$,

3) za $k=2$, $z_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$.

303.

Izračunati $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$.

Rješenje. $z=-8+8i\sqrt{3} \Rightarrow \rho=\sqrt{(-8)^2+(8\sqrt{3})^2}=16$,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{8\sqrt{3}}{-8}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3} \Rightarrow \varphi\in\left\{-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

Dobijene vrijednosti su glavne vrijednosti od φ. Kako samo $\frac{2\pi}{3}$ zadovoljava da je $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, to je $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

$$\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

1) za $k=0$, $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$

2) za $k=1$, $z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$

3) za $k=2$, $z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$

4) za $k=3$, $z_4=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$.

Napomena. Ako treba naći drugi korijen iz kompleksnog broja datog u algebarskom obliku:

$$z=a+bi,$$

a nepodesan je za prevođenje u trigonometrijski oblik, onda se primijeni svojstvo da drugi korijen iz kompleksnog broja ima dvije vrijednosti koje predstavljaju opet kompleksne brojeve, tj. $\sqrt{a+bi}=\pm(x+yi)$ gdje treba odrediti realne brojeve x i y.

Kako se to radi vidjećemo iz sljedećeg primjera.

304.

Naći vrijednosti $\sqrt{-7+24i}$.

Rješenje. S obzirom da je:

$$\sqrt{-7+24i}=\pm(x+iy),\quad (x,\ y\in R)$$

gdje su x i y realni brojevi, to kvadriranjem obiju strana prethodne jednačine dobijemo:

$$-7+24i=x^2-y^2+2xyi,$$

odakle izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobijemo:

$$x^2-y^2=-7$$

$$2xy=24.$$

Iz druge jednačine je $y=\frac{12}{x}$, te zamjenom u prvoj, dobijamo

$$x^4+7x^2-144=0$$

Rješenja ove jednačine su:

$$x_1=3,\ x_2=-3,\ x_3=4i,\ x_4=-4i,$$

ali, budući da je x realan dio traženog kompleksnog broja, to je $x_1=3$ i $x_2=-3$. Prema tome je $y_1=4$ i $y_2=-4$.

Kao što se očekivalo, dobili smo dva rješenja datog drugog korijena, tj.

$$\sqrt{-7+24i}=\pm(3+4i).$$

Napomena.

Potrebno je stalno imati na umu da iz definicije $i^2=-1$ ne slijedi da je $i=\sqrt{-1}$, već je $\sqrt{-1}=\pm i$. Takođe, $\sqrt{-4}$ nije jednako $2i$, već je $\sqrt{-4}=\pm 2i$.

(Kao što smo rekli, ovu metodu ne primjenjujemo kod korijena kod kojih je eksponent veći od 2 jer se tada javljaju velike teškoće kod rješavanja odgovarajućeg sistema jednačina.)

305.

Naći realni i imaginarni dio proizvoda i količnika korijena jednačine:

$$(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0.$$

Rješenje.

$$z_{1,2}=\frac{(5-i)\pm\sqrt{(5-i)^2-4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)}=\frac{(5-i)\pm\sqrt{-2i}}{2(2+i)}. \qquad (1)$$

Da bismo odredili korijene z_1 i z_2 date jednačine, treba izračunati vrijednost $\sqrt{-2i}$ na način koji smo pokazali u prethodnom primjeru, tj.

$$\sqrt{-2i}=\pm(a+bi)/^2, \quad (a,\ b\in R).$$

$$-2i=a^2-b^2+2abi$$

$$2ab=-2$$

$$a^2-b^2=0$$

$$a=-\frac{1}{b}$$

$$\left(-\frac{1}{b}\right)^2-b^2=0$$

$$b^4-1=0\Rightarrow(b^2-1)(b^2+1)=0$$

$$b_{1,2}=\pm1 \qquad a_{1,2}=\mp1$$

$$b_{3,4}=\pm i \qquad a_{3,4}=\pm i.$$

Rješenje (a,b) sistema $2ab=-2$, $a^2-b^2=0$ su uređeni parovi $(1,-1)$, $(-1,1)$, (i,i), $(-i,-i)$. Ali, pošto su realni dio a i imaginarni dio b realni brojevi, to treće i četvrto rješenje otpada, tako da je rješenje (a,b) samo parovi $(1,-1)$ i $(-1,1)$.

Prema tome, tražene vrijednosti $\sqrt{-2i}$ su:

$$-1+i,\ 1-i,$$

što je i logično, jer kvadratni korijen ima dvije vrijednosti. Prema tome je:

$$\sqrt{-2i}=\pm(-1+i).$$

Zbog znakova $\pm$ ispred $\sqrt{-2i}$ u (1) dovoljno je uzeti jednu od dvije vrijednosti $\pm(-1+i)$, na primjer $+(-1+i)$.

Dakle,

$$z_{1,2}=\frac{(5-i)\pm(-1+i)}{2(2+i)},$$

tj.

$$z_1=\frac{(5-i)+(-1+i)}{2(2+i)}=\frac{4}{2(2+i)}=\frac{2(2-i)}{(2+i)(2-i)}=$$

$$=\frac{4-2i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$$

$$z_2=\frac{(5-i)-(-1+i)}{2(2+i)}=\frac{6-2i}{2(2+i)}=\frac{3-i}{2+i}=$$

$$=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i.$$

Traženi proizvod korijena z_1 i z_2 glasi:

$$z_1\cdot z_2=\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\right)\cdot(1-i)=\frac{2-6i}{5}=\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i.$$

$$\operatorname{Re}(z_1\cdot z_2)=\frac{2}{5}, \qquad \operatorname{Im}(z_1\cdot z_2)=-\frac{6}{5}.$$

Količnik korijena z_1 i z_2 glasi:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i}{1-i}=\frac{4-2i}{5-5i}=\frac{(4-2i)(5+5i)}{(5-5i)(5+5i)}=\frac{30+10i}{50}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{3}{5}, \qquad \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{1}{5}.$$

306.

Naći realni i imaginarni dio proizvoda i količnika korijena jednačine:

$$z^2-(2+i)z+(-1+7i)=0.$$

Rješenje.

$$z_{1,2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{(2+i)^2-4(-1+7i)}}{2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{-24i+7}}{2}$$

$$\sqrt{-24i+7}=a+bi/^2$$

$$-24i+7=a^2-b^2+2abi$$

$$2ab=-24$$

$$a^2-b^2=7$$

$$a=-\frac{12}{b}$$

$$\left(-\frac{12}{b}\right)^2 - b^2 = 7$$

$$b^4 + 7b^2 - 144 = 0$$

$$b_{1,2} = \pm 3 \Rightarrow a_{1,2} = \mp 4$$

$$b_{3,4} = \pm 4i \Rightarrow a_{3,4} = \pm 3i.$$

Prema tome je:

$$\sqrt{-24i+7} = \pm(-4+3i).$$

Dakle, $z_{1,2} = \dfrac{(2+i) \pm (-4+3i)}{2}$

$$\underline{z_1 = -1+2i}, \quad \underline{z_2 = 3-i}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-1+2i)(3-i) = -1+7i$$

$$\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2) = -1, \quad \mathrm{Im}\,(z_1 \cdot z_2) = 7$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+2i}{3-i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{1}{2}.$$

307.

Riješiti binomnu jednačinu: $z^6 - 1 = 0$.

Rješenje.

$$z^6 - 1 = 0$$

$$z^6 = 1$$

$$z = \sqrt[6]{1} \Rightarrow \rho = 1, \ \varphi = 0$$

$$z = \sqrt[6]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{6} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{6}\right),$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.).$$

Ovdje su, dakle, svih šest rješenja:

1. **Za** $k = 0$; $z_1 = 1$
2. **Za** $k = 1$; $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$
3. Za $k = 2$; $z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$
4. Za $k = 3$; $z_4 = \cos\pi + i \sin\pi = -1$
5. Za $k = 4$; $z_5 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$
6. Za $k = 5$; $z_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$

308.

Riješiti binomnu jednačinu: $z^6 + 64 = 0$.

Rješenje.

$$z^6 + 64 = 0$$

$$z^6 = -64$$

$$z = \sqrt[6]{-64}, \quad \rho = 64, \quad \varphi = \pi$$

$$z = \sqrt[6]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{6} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{6}\right), \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.).$$

Stavimo li:

1. Za $k = 0$; $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3} + i$
2. Za $k = 1$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$
3. Za $k = 2$; $z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = -\sqrt{3} + i$
4. Za $k = 3$; $z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right) =$

   $= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right) = -\sqrt{3} - i$
5. Za $k = 4$; $z_5 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$
6. Za $k = 5$; $z_6 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right) =$

   $= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3} - i.$

309.

Riješiti jednačinu: $z^5-1-i=0$.

Rješenje.

$$z^5-1-i=0$$

$$z^5=1+i$$

$$z=\sqrt[5]{1+i}, \qquad \rho=\sqrt{2}, \quad \varphi=\frac{\pi}{4}$$

$$z=\sqrt[5]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{5}\right)=$$

$$=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi+8k\pi}{20}+i\sin\frac{\pi+8k\pi}{20}\right), \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Stavimo li:

1. $k=0,\ z_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right)$

2. $k=1,\ z_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20}+i\sin\frac{9\pi}{20}\right)$

3. $k=2,\ z_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20}+i\sin\frac{17\pi}{20}\right)$

4. $k=3,\ z_4=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

5. $k=4,\ z_5=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20}+i\sin\frac{33\pi}{20}\right)$.

4.5.6. *Logaritmovanje kompleksnih brojeva*

Definicija prirodnog logaritma kompleksnog broja ista je kao i za realne brojeve. Neka je logaritam kompleksnog broja $z=a+ib$ jednak nekom kompleksnom broju $W=\alpha+i\beta$ $(a, b, \alpha, \beta$ su realni brojevi), tj.

$$\ln_{\ell}(a+ib)=\alpha+i\beta, \quad (a\neq 0 \ \vee \ b\neq 0). \tag{1}$$

tada je, prema definiciji logaritma,

$$a+ib=e^{\alpha+i\beta}$$

tj.

$$a+ib=e^{\alpha}\cdot e^{i\beta},$$

ili prema Ojlerovoj formuli, koja glasi:

$$e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta,$$

imamo da je:

$$a+ib=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta),$$

tj.

$$a+ib=e^{\alpha}\cos\beta+i\,e^{\alpha}\sin\beta,$$

odakle na osnovu jednakosti dva kompleksna broja imamo da je:

$$a=e^{\alpha}\cos\beta \quad b=e^{\alpha}\sin\beta. \tag{2}$$

Kvadrirajući i sabirajući dobijene jednakosti, dobija se:

$$a^2+b^2=e^{2\alpha}\cos^2\beta+e^{2\alpha}\sin^2\beta=e^{2\alpha}(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=e^{2\alpha},$$

tj.

$$e^{2\alpha}=a^2+b^2,$$

tj.

$$e^{\alpha}=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{3}$$

gdje je pred korijenom znak $+$, jer je e^{α} uvijek pozitivan za α realno.

Poslije logaritmovanja posljednje relacije dobija se:

$$\alpha=\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2). \tag{4}$$

Iz relacija (2) i (3) dobija se:

$$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

tj.

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a} \quad (a\neq 0). \tag{5}$$

(za $a=0 \Rightarrow \cos\beta=0,\ \sin\beta=1,$ tj. $\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$).

Kako se posljednja jednačina ne mijenja kada se u njoj β zamijeni sa $\beta+k\pi$ (k cio broj), to je:

$$\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}+k\pi. \tag{6}$$

Prema tome, jednačina (1), prema (4) i (6) glasi:

$$\ln(a+ib)=\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2)+i\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}+2k\pi\right), \text{ za } a>0 \tag{7}$$

$$\ln(a+ib)=\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2)+i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}+(2k+1)\pi\right], \text{ za } a<0, \tag{8}$$

$$\ln(a+ib)=\ln bi=\ln|b|+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right), \text{ za } a=0 \text{ i } b\neq 0$$

gdje je k cio broj.

11*

Za $b=0$, prva jednakost daje prirodne logaritme pozitivnih brojeva, tj.

$$\ln a = \ln a + 2k\pi i, \qquad (a>0), \tag{9}$$

a druga jednačina daje prirodne logaritme negativnih brojeva, tj.

$$\ln a = \ln|a| + i(2k+1)\pi. \qquad (a<0) \tag{10}$$

Jednačina (9) kazuje da logaritam pozitivnog broja ima beskonačno mnogo vrijednosti, od kojih je samo jedna realna za $k=0$, a jednačina (10) kazuje da logaritam negativnog broja ima beskonačno mnogo vrijednosti i sve su kompleksne.

Ako je kompleksni broj $z=a+ib$ dat u Ojlerovom obliku, tj.

$$a+ib=\rho\, e^{i(\varphi+2k\pi)}, \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$$

onda je:

$$\ln(a+ib)=\ln\rho + i(\varphi+2k\pi). \tag{11}$$

U zavisnosti od vrijednosti a i b relacija (11) nam daje mogućnost za određivanje prirodnih logaritama, kako pozitivnih i negativnih realnih brojeva, tako i imaginarnih i kompleksnih brojeva.

310.

Izračunati: a) $\ln(-1)$, b) $\ln(-2)$.

Rješenje.

a) Broj -1 je specijalan slučaj kompleksnog broja $z=a+ib$ u kome je $a=-1$, $b=0$, pa je $\rho=1$, $\varphi=\pi$, te je na osnovu (11)

$$\ln(-1)=\ln 1 + i(\pi+2k\pi) = i(2k+1)\pi, \qquad (k=0,\ \pm1, \pm2,\ldots)$$

b) Broj -2 je takođe specijalan slučaj kompleksnog broja u kome je $a=-2$, $b=0$, pa je $\rho=2$, $\varphi=\pi$, te je na osnovu (11)

$$\ln(-2)=\ln 2 + i(\pi+2k\pi) = \ln 2 + i(2k+1)\pi, \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

311.

Izračunati: a) $\ln i$, b) $\ln(7i)$.

Rješenje.

a) Da se nađe $\ln i$ treba uzeti da je $a=0$, $b=1$, te je: $\rho=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$,

pa nam relacija (11) daje:

$$\ln i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

b) Da se nađe $\ln(7i)$ treba uzeti da je $a=0$, $b=7$, te je:

$\rho=7$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, pa relacija (11) daje:

$$\ln(7i)=\ln 7 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = \ln 7 + + i\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots).$$

312.

Naći $\ln(1+i)$.

Rješenje.

Za kompleksni broj $z=1+i$ je $a=1$, $b=1$, te je $\rho=\sqrt{2}$,

$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, pa relacija (11) daje:

$$\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)= =\ln\sqrt{2}+i\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi, \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

Napomena.

Ako su a i b dva kompleksna broja, onda je:

$$a^b = e^{b\ln a}, \quad a\neq 0.$$

Na osnovu ove relacije riješićemo sljedeće primjere:

313.

Izračunati $(1-i)^{1+i}$.

Rješenje.

$$(1-i)^{1+i}=e^{(1+i)\ln(1-i)}=\left\{\begin{array}{l} z=1-i \Rightarrow \rho=\sqrt{2}, \quad \varphi=-\dfrac{\pi}{4} \\ 1-i=\sqrt{2}\, e^{-i\pi(\frac{1}{4}+2k)} \\ \ln(1-i)=\ln\sqrt{2}-i\pi\left(\dfrac{1}{4}+2k\right) \end{array}\right\}=$$

$$= e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2} - i\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)\right]} =$$

$$= e^{\ln\sqrt{2} - i\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right) + i\ln\sqrt{2} + \pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)} =$$

$$= e^{\ln\sqrt{2}} \cdot e^{\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)} \cdot e^{i\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \cdot e^{i2k\pi} =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} e^{\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2} & \\ e^{i2k\pi} = 1, & k = 0, \pm 1, \ldots \end{array}\right\} =$$

$$= \sqrt{2}\, e^{\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)} \cdot e^{i\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt{2}\, e^{\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)} \cdot \left[\cos\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

314.

Izračunati: $i^{\ln i}$

Rješenje.

$$i^{\ln i} = e^{\ln i \cdot \ln i} = \left\{\begin{array}{l} z = i \Rightarrow \rho = 1, \ \varphi = \frac{\pi}{2} \\ i = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)} \\ \ln i = i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right) \end{array}\right\} =$$

$$= e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)\cdot\ln i} = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)\, i\pi\left(\frac{1}{2}+2n\right)} =$$

$$= e^{-\pi^2\left(\frac{1}{4}+k+n+4kn\right)} = e^{-\pi^2\left(\frac{1}{4}+m\right)},$$

$$k, n, m \in (0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

4.6. Riješeni zadaci za utvrđivanje gradiva iz kompleksnih brojeva

315.

Pokazati da su $z_1 = 2 + 3i$ i $z_2 = -2 + i$ nule funkcije $f(z) = z^2 - 4iz - 7 - 4i$.

Rješenje.

$$f(z_1) = (2+3i)^2 - 4i(2+3i) - 7 - 4i =$$
$$= 4 + 12i + 9i^2 - 8i - 12i^2 - 7 - 4i =$$
$$= 4 + 12i - 9 - 8i + 12 - 7 - 4i = 0$$
$$f(z_2) = (-2+i)^2 - 4i(-2+i) - 7 - 4i =$$
$$= 4 - 4i + i^2 + 8i - 4i^2 - 7 - 4i =$$
$$= 4 - 4i - 1 + 8i + 4 - 7 - 4i = 0$$

Pošto je $f(z_1) = 0$ i $f(z_2) = 0$, to su z_1 i z_2 zaista nule funkcije $f(z)$.

316.

Izračunati: $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

Rješenje. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{50} = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{50} = i^{50} = i^{48+2} = i^2 = -1.$

317.

Izračunati: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}$.

Rješenje.

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30} = \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]^{20} + \left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]^{10} =$$

$$= \left(\frac{1+3i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3}}{8}\right)^{20} + \left(\frac{1-3i\sqrt{3}-9+3i\sqrt{3}}{8}\right)^{10} =$$

$$= (-1)^{20} + (-1)^{10} = 1 + 1 = 2.$$

318.

Odrediti skup svih tačaka koji zadovoljava jednačinu:

$$|z+i| = |z+2|.$$

Rješenje. Neka je $z = x + iy$, tada se data jednačina može napisati u jednom od oblika:

$$|x+iy+i| = |x+iy+2|,$$
$$|x+i(y+1)| = |(x+2)+iy|,$$
$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}.$$

Poslije kvadriranja lijeve i desne strane posljednje jednakosti dobiće se:

$$x^2+(y+1)^2=(x+2)^2+y^2$$
$$x^2+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2$$
$$2y+1=4x+4$$
$$2y=4x+3$$
$$y=2x+\frac{3}{2}.$$

Dakle, traženi skup svih tačaka je pravac.

319.

Odrediti skup tačaka koji zadovoljava nejednačine:

$$3\leqslant|z+i|\leqslant 5.$$

Rješenje. Neka je $z=x+iy$, tada date nejednakosti poprimaju oblik:

$$3\leqslant|x+iy+i|\leqslant 5,$$

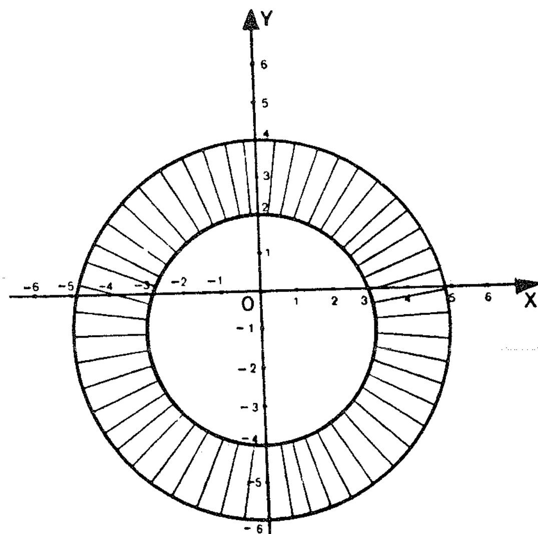
tj.

$$3\leqslant\sqrt{x^2+(y+1)^2}\leqslant 5.$$

Pošto se smisao nejednakosti neće promijeniti kvadriranjem, to poslije kvadriranja dobijamo:

$$9\leqslant x^2+(y+1)^2\leqslant 25.$$

Kao što vidimo, date nejednačine zadovoljavaće sve tačke kružnog prstena ograničenog koncentričnim kružnicama s centrom u tački $(0, -1)$ i polu-prečnicima $r_1=3$ i $r_2=5$, pri čemu tom skupu pripadaju i sve tačke sa kružnica (sl. 7).



Sl. 7.

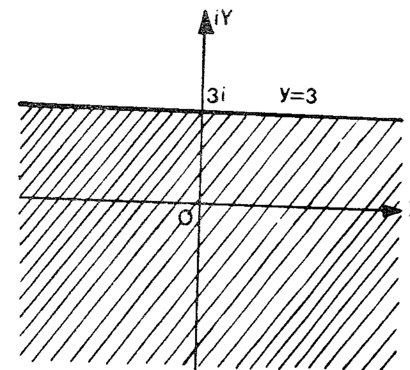
320.

U ravni koordinatnog sistema šrafirati onaj dio čije tačke zadovoljavaju nejednačinu: $I_m(z)\leqslant 3$.

Rješenje. Ako je dat kompleksni broj $z=x+iy$, onda je $I_m(z)=y$, pa iz uslova zadatka proizilazi da je:

$$y\leqslant 3.$$

Dakle, sve tražene tačke su raspoređene u poluravni koja se nalazi ispod prave $y=3$ koja je normalna na y-osu, kao i sve tačke te prave.



Sl. 8.

321.

Odrediti skup svih tačaka koji zadovoljava nejednačinu:

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<2.$$

Rješenje. Iz date nejednačine dobijamo da je:

$$0<\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<(\sqrt{3})^2$$

$$0<\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<3.$$

Pošto je: $|z|+2>0$, jer je uvijek $|z|\geqslant 0$, to je:

$$0<|z|^2-|z|+1<3(2+|z|)$$

tj.

$$0<|z|^2-|z|+1<6+3|z|.$$

Dobijenu dvojnu nejednačinu možemo napisati u obliku dvije nejednačine:

$$|z|^2-|z|+1>0 \quad (1)$$

$$|z|^2-|z|+1<6+3|z|. \quad (2)$$

Nejednačina (1) je zadovoljena za svako $|z|$, dok nejednačina (2) je ekvivalentna nejednačini:

$$|z|^2-4|z|-5<0,$$

odnosno

$$|z|^2+|z|-5|z|-5<0,$$

odakle imamo:

$$|z|(|z|+1)-5(|z|+1)<0$$

$$(|z|+1)(|z|-5)<0.$$

Zbog $|z|\geqslant 0$ to je uvijek faktor $|z|+1>0$, pa iz:

$$|z|-5<0$$

dobijamo:

$$0\leqslant |z|<5,$$

odnosno:

$$\sqrt{x^2+y^2}<5$$

$$x^2+y^2<5^2.$$

Prema tome, sve tačke koje opisuje kompleksni broj z zadovoljavaju uslov:

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<2,$$

a nalaze se unutar kruga poluprečnika $r=5$ s centrom u koordinatnom početku, pri čemu tačke na kružnici ne zadovoljavaju pomenuti uslov.

322.

Naći skup tačaka koji zadovoljava uslov:

$$I_m\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0,$$

pri čemu su z_1 i z_2 date tačke.

Rješenje. Iz uslova zadatka proizilazi da je imaginarni dio kompleksnog broja $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ jednak nuli, što znači da je $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ realan broj, pa možemo pisati:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}=k,$$

gdje je k realan broj i $z\neq z_2$.

Ako je $k=0$, onda je $z=z_1$. Međutim, ako je $k\neq 0$, onda je:

$$z-z_1=k(z-z_2).$$

Ako prednju jednakost shvatimo kao jednakost vektora, onda zaključujemo da vektori $(z-z_1)$ i $(z-z_2)$ leže na jednom te istom pravcu (kolinearni su), pa će zato i tačke z, z_1, z_2 ležati na istom pravcu. Ako se uzme u obzir činjenica da je $z\neq z_2$ proizilazi da je traženi skup svih tačaka z koje zadovoljavaju relaciju:

$$I_m\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0$$

pravac koji prolazi kroz tačke z_1 i z_2 iz kojeg je isključena tačka z_2.

323.

Dati geometrijsko tumačenje jednakosti:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0.$$

Rješenje. Neka je $z=x+iy$, $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. Onda je:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{(x-x_1)+(y-y_1)\,i}{(x-x_2)+(y-y_2)\,i}=$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}+$$

$$+\frac{(x-x_2)(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_2)}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\,i.$$

Iz uslova zadatka slijedi da je $z\neq z_2$ i

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

ili

$$x^2-(x_1+x_2)\,x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)\,y+y_1y_2=0,$$

ili

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Međutim,

$$\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2=\left[\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{2}\right]^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

gdje je d rastojanje između tačaka z_1 i z_2. Stavimo li da je $\frac{x_1+x_2}{2}=a$, $\frac{y_1+y_2}{2}=b$, tada je tačka $z_0=a+bi$ sredina odsječka između tačaka z_1 i z_2. Prema tome, jednačina (1) napisana u obliku:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

geometrijski predstavlja kružnicu s centrom u tački $z_0=a+bi$ i radijusom $\frac{d}{2}$.

Prema tome, ako uzmemo u obzir da je $z_1\neq z_2$, dobijamo da traženi skup tačaka z geometrijski predstavlja kružnicu čiji je prečnik duž koja spaja tačke z_1 i z_2, pri čemu je tačka z_2 isključena iz te kružnice.

Napomena.

Ovaj zadatak se može riješiti i na sljedeći način:

Neka je: $\frac{z-z_1}{z-z_2}=ki,\qquad (k\in\mathbf{R})$

tj.

$$z-z_1=ki\,(z-z_2),$$

pri čemu je $z \neq z_2$. To znači da je:

$$\arg(z-z_1)=\arg(z-z_2)\pm\frac{\pi}{2}$$

pri čemu je $\arg(ki)=\pm\frac{\pi}{2}$, za $k\neq 0$, tj. vektor $(z-z_1)$ je normalan na vektor $(z-z_2)$.

U tom slučaju je skup tačaka z koji se traži, kružnica čiji je prečnik duž koja spaja tačke z_1 i z_2, pri čemu je zbog $z\neq z_2$ tačka z_2 isključena iz te kružnice. Tačka $z=z_1$ nije isključena iz te kružnice jer odgovara slučaju kada je $k=0$.

324.

Odrediti familiju krivih linija datih jednačinom:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=c, \quad (-\infty<c<\infty).$$

Rješenje. Ako je $z=x+iy$, onda je:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

tj.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Iz uslova zadatka imamo da je:

$$\frac{x}{x^2+y^2}=c.$$

1) Ako je $c\neq 0$, onda je:

$$x^2+y^2=\frac{x}{c}$$

ili

$$\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+y^2=\frac{1}{4c^2}. \qquad (1)$$

Prema tome, dobijena relacija (1) predstavlja familiju kružnica s centrima $\left(\frac{1}{2c},\ 0\right)$ i poluprečnika $\frac{1}{2|c|}$, gdje je c realan parametar. Sve te kružnice dodiruju imaginarnu osu u koordinatnom početku.

2) Ako je $c=0$, onda iz jednakosti:

$$\frac{x}{x^2+y^2}=c$$

slijedi da je $x=0$, tj. sve tačke koje se traže leže na imaginarnoj osi.

Ako pretpostavimo da je $z\neq 0$, dobijamo da je tražena familija krivih linija familija svih kružnica i sama imaginarna osa, pri čemu iz tih kružnica i imaginarne ose treba tačku O isključiti.

325.

Odrediti familiju krivih linija datih jednačinom:

$$\operatorname{Re}(z^2)=c, \quad (-\infty<c<\infty).$$

Rješenje. Ako je $z=x+iy$, tada je:

$$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi,$$

tj.

$$x^2-y^2=c.$$

1) Ako je $c\neq 0$, onda $x^2-y^2=c$ predstavlja familiju ravnostranih hiperbola.

Ako je $c>0$, onda kanonična jednačina familije glasi:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{c})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{c})^2}=1.$$

Međutim, ako je $c<0$, onda kanonična jednačina familije glasi:

$$\frac{y^2}{(\sqrt{-c})^2}-\frac{x^2}{(\sqrt{-c})^2}=1.$$

2) Ako je $c=0$, onda je $x^2-y^2=0$, ili $y=\pm x$ predstavlja jednačinu dvije prave.

326.

Dokazati da jednačina:

$$z\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{z}+b=0$$

(b je realna, dok je a kompleksna konstanta), predstavlja kružnicu u kompleksnoj ravni.

Rješenje. Uzmimo da je:

$$z=x+iy \qquad a=\operatorname{Re}(a)+i\operatorname{Im}(a)$$

$$\bar{z}=x-iy \qquad \bar{a}=\operatorname{Re}(a)-i\operatorname{Im}(a)$$

$$z\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{z}+b=0$$

$$(x+iy)(x-iy)+[\text{Re}(a)-i\ \text{Im}(a)](x+iy)+$$
$$+[\text{Re}(a)+i\ \text{Im}(a)](x-iy)+b=0$$
$$x^2+y^2+x\,\text{Re}(a)+iy\,\text{Re}(a)-ix\,\text{Im}(a)+y\,\text{Im}(a)+x\,\text{Re}(a)+$$
$$+ix\,\text{Im}(a)-iy\,\text{Re}(a)+y\,\text{Im}(a)+b=0$$
$$x^2+y^2+2\,\text{Re}(a)\,x+2\,\text{Im}(a)\,y+b=0.$$

327.

Koju krivu opisuje tačka $z=2\,e^{ti}+e^{-ti}$, ako je t realan parametar.

Rješenje. $z=2\,e^{ti}+e^{-ti}$

$$x+iy=2(\cos t+i\sin t)+[\cos(-t)+i\sin(-t)]$$
$$x+iy=2\cos t+2i\sin t+\cos t-i\sin t$$
$$x+iy=3\cos t+i\sin t.$$

Na osnovu jednakosti dva kompleksna broja imamo da je:

$$x=3\cos t$$
$$y=\sin t$$
$$\frac{x}{3}=\cos t$$
$$y=\sin t$$
$$\frac{x^2}{9}=\cos^2 t$$
$$y^2 \quad \sin^2 t$$
$$\frac{x^2}{9}+y^2=1 \quad \text{(elipsa).}$$

328.

Gdje se nalaze kompleksni brojevi u kompleksnoj ravni koji zadovoljavaju relaciju:

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}>1?$$

Rješenje. Iz uslova:

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}>1 \quad (1)$$

imamo da je:

$$0<\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}<\frac{1}{2}$$

tj.

$$\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}>0 \quad (2)$$

$$\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}<\frac{1}{2}. \quad (3)$$

Pošto je:

$$|z-1|+4>0, \quad (4)$$

to iz (2) slijedi da je i

$$3|z-1|-2>0. \quad (5)$$

Iz (3) pak, imamo da je:

$$2|z-1|+8<3|z-1|-2$$

tj.

$$|z-1|>10. \quad (6)$$

Uslov (5) je sadržan u (6) i ne daje dopunska ograničenja pa je, prema tome, rješenje samo (6) iz kojeg slijedi da je:

$$|x+iy-1|>10$$
$$|(x-1)+iy|>10$$
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}>10$$
$$(x-1)^2+y^2>100.$$

Dakle, kompleksni brojevi z koji udovoljavaju uslov (1) nalaze se u kompleksnoj ravni van kružnice, čiji se centar nalazi u tački $C(1, 0)$, a poluprečnik joj je 10.

329.

Odrediti kompleksni broj z tako da je:

$$|z-3i|=5\sqrt{2} \quad \text{i} \quad \arg(z-3i)=-\frac{\pi}{4}.$$

Rješen e.

Iz uslova zadatka

$$\left(|z-3i|=\rho=5\sqrt{2},\ \arg(z-3i)=\varphi=-\frac{\pi}{4}\right),$$

slijedi da je:

$$z-3\,i=\rho\, e^{i\varphi}=5\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}=5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5-5\,i,$$

tj.

$$z=5-5\,i+3\,i,$$

pa je

$$z=5-2\,i.$$

330.

Naći kompleksni broj z koji zadovoljava uslove:

$$\left|\frac{z-4}{z-6-5\,i}\right|=2 \quad \text{i} \quad \left|\frac{z-1+4\,i}{z-8\,i}\right|=\frac{3}{2}.$$

Rješenje.

$$\left|\frac{z-4}{z-6-5\,i}\right|=2 \qquad \left|\frac{z-1+4\,i}{z-8\,i}\right|=\frac{3}{2}.$$

$$\frac{|z-4|}{|z-6-5\,i|}=2 \qquad \left|\frac{z-1+4\,i}{z-8\,i}\right|=\frac{3}{2}.$$

$$|z-4|=2\,|z-6-5\,i| \qquad 2\,|z-1+4\,i|=3\,|z-8\,i|$$

$$|x+iy-4|=2\,|x+iy-6-5\,i|$$

$$2\,|x+iy-1+4\,i|=3\,|x+iy-8\,i|$$

$$|(x-4)+iy|=2\,|(x-6)+i\,(y-5)|$$

$$2\,|(x-1)+i\,(y+4)|=3\,|x+i\,(y-8)|$$

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}$$

$$2\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}=3\sqrt{x^2+(y-8)^2}$$

$$3\,x^2+3\,y^2-40\,x-40\,y+228=0 \qquad (1)$$

$$5\,x^2+5\,y^2+8\,x-176\,y+508=0. \qquad (2)$$

Riješimo sistem jednačina (1) i (2):

$$\begin{cases}3\,x^2+3\,y^2-40\,x-40\,y+228=0/\cdot(-5)\\ 5\,x^2+5\,y^2+8\,x-176\,y+508=0/\cdot 3\end{cases}$$

$$224\,x-328\,y+384=0$$

$$28\,x-41\,y+48=0$$

$$y=\frac{4\,(7\,x+12)}{41}. \qquad (3)$$

Ako relaciju (3) smijenimo u (2), dobijamo poslije sređivanja:

$$85\,x^2-1208\,x+3580=0$$

tj.

$$x_{1,2}=\frac{604\pm\sqrt{364816-304300}}{85}=$$

$$=\frac{604\pm\sqrt{60516}}{85}=\frac{604\pm 246}{85}$$

$$x_1=10\ , \quad x_2=4\,\frac{18}{85}.$$

Uvrstimo li dobijene vrijednosti za x_1 i x_2 u (3), dobićemo:

$$y_1=8\ , \quad y_2=4\,\frac{4}{85}.$$

Prema tome, postoje dva kompleksna broja:

$$z_1=10+8\,i \quad \text{i} \quad z_2=4\,\frac{18}{85}+4\,\frac{4}{85}\,i$$

koji zadovoljavaju uslove zadatka.

331.

Ako su dati kompleksni brojevi $z_1=3+2\,i$ i $z_2=2+i$, odrediti kompleksni broj $z=x+iy$, tako da je:

$$\mathrm{Re}\,(z\cdot\bar{z}_1)=-1 \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z}{z_2}\right)=\frac{3}{5}.$$

Rješenje.

$$z\cdot\bar{z}_1=(x+iy)\,(3-2\,i)=(3\,x+2\,y)+i\,(-2\,x+3\,y)$$

$$3\,x+2\,y=-1 \qquad (1)$$

$$\frac{z}{z_2}=\frac{x+iy}{2+i}=\frac{2\,x+y}{5}+i\,\frac{2\,y-x}{5}$$

$$\frac{2\,y-x}{5}=\frac{3}{5}. \qquad (2)$$

Rješavanjem jednačina (1) i (2) dobijamo da je $x=-1$ i $y=1$. Prema tome, traženi kompleksni broj z glasi:

$$z=-1+i.$$

332.

Odrediti prirodni broj n ako je: $(1+i)^n=(1-i)^n$.

Rješenje.

Iz uslova zadatka imamo da je:

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n}=1, \quad \text{ili} \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1, \quad \text{ili} \quad \left[\frac{(1+i)^2}{2}\right]^n=1$$

ili $i^n=1$, a odavde slijedi da je $n=4k$, gdje je:

$$k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \dots .$$

333.

Odrediti argument kompleksnog broja $z_1=z^2-z$, ako je: $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, i $0<\varphi<2\pi$.

Rješenje.

$$z_1=z^2-z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2-(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=(\cos 2\varphi-\cos\varphi)+i(\sin 2\varphi-\sin\varphi)=$$

$$=-2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}+i\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} \qquad (1)$$

Sa druge pak, strane je:

$$z_1=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha) \qquad (2)$$

$$\rho=\sqrt{\left(-2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)^2+\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\arg z_1=\alpha$$

Iz relacije (1) i (2) dobijamo da je:

$$\rho\cos\alpha=-2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2} \qquad (3)$$

$$\rho\sin\alpha=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}. \qquad (4)$$

Ako u dobijenim relacijama (3) i (4) zamijenimo ρ njegovom vrijednošću:

$$\rho=2\sin\frac{\varphi}{2},$$

dobiće se da je:

$$\cos\alpha=-\sin\frac{3\varphi}{2}=\sin\left(-\frac{3\varphi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}\right)$$

$$\sin\alpha=\cos\frac{3\varphi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}\right).$$

Dakle,

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}+2k\pi, \qquad k\in\{0, \pm 1, \pm 2, +\dots\}.$$

334.

Odrediti prirodni broj x iz uslova:

$$(3+4i)^{x-1}-(1+i)^4=5^x.$$

Rješenje. S obzirom da je: $(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(2i)^2=-4$, to uslov zadatka poprima oblik

$$(3+4i)^{x-1}=5^x-4. \qquad (1)$$

Iz relacije (1) slijedi da je:

$$|(3+4i)^{x-1}|=|5^x-4|$$

tj.

$$|3+4i|^{x-1}=5^x-4, \quad \text{jer je}$$

$$5^x-4\geqslant 1 \quad \text{zbog } x\in N.$$

$$5^{x-1}=5^x-4$$

$$5^x-5^{x-1}=4$$

$$5^{x-1}(5-1)=4$$

$$5^{x-1}=1$$

$$x-1=0$$

$$x=1.$$

335.

Naći kompleksni broj z, ako je $z=\bar{z}$.

Rješenje.

Znamo da je $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$. Zato će data jednačina poprimiti oblik:

$$x+iy=x-iy,$$

odakle je:

$x=x$, $y=-y$, tj. x je bilo koji realan broj, dok je $y=0$.

12*

336.

Naći kompleksan broj z iz uslova $z^2+|z|=0$.

Rješenje. Neka je $z=x+iy$, tada se data jednačina može napisati u obliku:

$$(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

odakle je:

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=0.$$

Iz uslova o jednakosti kompleksnog broja nuli imamo da je:

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}&=0\\ 2xy&=0\end{aligned}\right\}.$$

Iz druge jednačine prednjeg sistema jednačina imamo da je $x=0$ ili $y=0$. Zato se mogu napisati sljedeća dva slučaja:

1. Ako je $x=0$, onda prva jednačina sistema poprima oblik:

$$-y^2+|y|=0,$$

ili

$$|y|^2-|y|=0,$$

odakle imamo sljedeće dvije mogućnosti:

a) $|y|=1,\ y=\pm 1,\ z=\pm i$

b) $|y|=0,\ y=0,\ z=0.$

2. Ako je $y=0$, onda prva jednačina sistema poprima oblik:

$$x^2+|x|=0$$

ili

$$|x|^2+|x|=0,$$

odakle je: $|x|=0$, tj. $x=0$, pa je $z=0$.

Dakle, imamo rješenja $z=\pm i$, $z=0$.

337.

Dokazati da je:

$$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=0}^{100} C_{100}^k(\sqrt{3}\,i)^k=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Rješenje.

$$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=0}^{100} C_{100}^k(\sqrt{3}\,i)^k=\sum_{k=0}^{100} C_{100}^k\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}.$$

Međutim, kako je $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, to je $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}=$

$$=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}-$$

$$-i\sin\frac{\pi}{3}=-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

što je trebalo i dokazati.

4.7. Zadaci za samostalan rad

338.

Izračunati:

a) $i^{25}+(-i)^{50}+i^{62}+i^{83}$,

b) $i^{20}+i^{30}+i^{40}+i^{50}+i^{60}+i^{70}$,

c) $(-i)^{63}-i^{102}+i^{112}+i^{201}$,

d) $i^{-253}+i^{602}+i^{408}$,

e) $5i-9i+12i$,

f) $ai+bi-ai$.

339.

Izračunati:

a) $(1+4i)+(-1-4i)$,

b) $(7-5i)-(7+5i)$.

c) $i+(a+bi)$,

d) $1+4i-(-1-4i)$,

e) $(0{,}25-i)-(0{,}75+i)$,

f) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}i\right)$,

g) $-6+3i-(6+3i)$,

h) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i\right)$.

340.

Izračunati:

a) $5(2-3i)$,

b) $-2(3-i)$,

c) $-0{,}5i(1+2i)$,

d) $(3+2i)(4-i)$,

e) $(1-i)(2+i)$,

f) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}6i)$,

g) $(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$,

h) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{3}i\right)$.

341.

Izračunati:

a) $\frac{10i}{2}$, d) $\frac{21-i}{i}$, g) $\frac{63+16i}{4+3i}$,

b) $\frac{15i}{5i}$, e) $\frac{1+i}{i}$, h) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$,

c) $\frac{8i}{-16i}$, f) $-\frac{12}{5i}$, i) $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$.

342.

Izračunati:

a) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$, b) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.

343.

U kompleksnoj ravni predstaviti sljedeće kompleksne brojeve:

a) $5+3i$, e) $-4i$,

b) $4-i$, f) $5i$,

c) $-3+2i$, g) 5,

d) $-2-2i$, h) -3.

344.

Odrediti realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva:

a) $-6i$, c) $\mathrm{oos}\,\alpha+i\sin\alpha-1$,

b) $3-2i$, d) $m+in+p+i$.

345.

Za koje će vrijednosti realnog parametra k, kompleksni broj $z=(4k^2-9)+i(5-6k)$ biti: a) realan, b) imaginaran?

346.

Na osnovu definicije jednakosti kompleksnih brojeva, odrediti x i y iz jednačina:

a) $3x+ix-2y=12-iy-i$, c) $x+iy-2=4xi+3y+3i$,

b) $5x-3yi+2i=6-ix-y$, d) $aix+biy-a=i-a^2x-b^2y$,

e) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$, f) $\frac{x-2+(y-3)i}{1+i}=1-3i$,

g) $(x+y)^2 i-\frac{6}{1}-x=-y+5i(x+y)-1$,

h) $3^{x^2}-y^2+i\,4^{x+y^2}=81+16i$.

347.

Ako su dati kompleksni brojevi:

$$z_1=(u+v)+i(u^2+v^2)$$

$$z_2=(u^2+v^2)+i(1-v),$$

odrediti u i v tako da je:

a) $z_1=z_2$,

b) da z_1 bude konjugovano kompleksno sa z_2.

348.

Riješiti sisteme jednačina:

a) $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i$
$(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i$

b) $(2+i)x+(2-i)y=6$
$(3+2i)x+(3-2i)y=8$

c) $x+iy-2z=10$
$x-y+2iz=20$
$ix+3iy-(1+i)z=30.$

349.

Odrediti skup svih tačaka z koje zadovoljavaju jednakosti:

a) $3\leqslant|z+i|\leqslant 5$, d) $|z-z_1|=|z-z_2|$, gdje su z_1 i z_2 date tačke,

b) $|z-3|=5$, e) $|z-2|-|z+2|>3$,

c) $\mathrm{Re}(z)\geqslant 2$, f) $|z|=\mathrm{Re}\,z+1$,

g) $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=c$, $(-\infty<c<\infty)$,

h) $\mathrm{Im}(z^2)=c$, $(-\infty<c<\infty)$.

350.

Ako je $z=x+iy$ i $a=2-i$, onda pokazati da jednačina:

$$z\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{z}-8=0$$

u kompleksnoj ravni predstavlja kružnicu.

351.

Odrediti geometrijsko mjesto tačaka z za koje je:

$$\operatorname{Re}\{(1+i)z\}=0.$$

Rješenje. Pravac $y=x$.

352.

Pokazati da jednačina $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{3}\right)=0$ predstavlja kružnicu.

353.

Odrediti, gdje se nalaze tačke koje odgovaraju kompleksnim brojevima z za koje je:

$$|z-1|=|z+1|=|z-i\sqrt{3}|.$$

354.

Odrediti kompleksni broj z tako da je:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_2}\right)=\frac{3}{5} \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(z\cdot\bar{z}_1)=-1.$$

355.

Ako je $z_1=2+i$, onda odrediti broj z tako da je:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_1}\right)=-\frac{3}{5} \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(\bar{z}\cdot z_1)=1.$$

356.

Naći argument kompleksnog broja $z_1=z^3+z^2$, ako je:

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi \text{ za } 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

Rješenje. $z_1=z^2(z+1)$. S obzirom da je $\arg z^2=2\varphi$, to je:

$$z+1=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$|z+1|=2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|.$$

1) Za $\cos\frac{\varphi}{2}=0$, $\arg z_1$ nije određen,

2) Za $\cos\frac{\varphi}{2}>0$, $\arg z_1=\frac{5\varphi}{2}$,

3) Za $\cos\frac{\varphi}{2}<0$, $\arg z_1=\pi+\frac{5\varphi}{2}$.

357.

Riješiti jednačinu: $\bar{z}=-4z$.

Rješenje. $z=0$.

358.

Odredite realne brojeve a i b, ako je:

$$a(2+3i)+b(3+2i)=1.$$

359.

Naći kompleksan broj z koji zadovoljava jednačinu:

$$|z|i+2z=1.$$

Rješenje. $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$.

360.

Koje tačke (x, y) ravni xOy zadovoljavaju jednačinu:

a) $|\sqrt{2x+y}+i\sqrt{x+2y}|=3$,

b) $|\sqrt{x^2+4}+\sqrt{y-4i}|=\sqrt{10}$.

361.

Naći kompleksni broj a iz uslova:

$$(a+i)(1+2i)+(1+ai)(3-4i)=1+7i.$$

Rješenje. $a=1+i$.

362.

Za koje vrijednosti x su kompleksni brojevi:

$$\log(2x^2+x+1)+i\cdot 4^x \text{ i } \log(x^2+1)+i(2^{x+1}-3)$$

konjugovano kompleksni?

Rješenje. $x=0$.

363.

Naći kompleksni broj z, koji zadovoljava sistem jednačina:

$$|z+2i|=|z-4i|$$
$$|z-4|=1$$

Rješenje. $z=4+i.$

364.

Naći realne vrijednosti x koje zadovoljavaju nejednakost:

$$\left|\frac{1+i\sqrt{7}}{4}-\cos x\right|<1.$$

Rješenje. $-\frac{2\pi}{3}+2n\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2n\pi, \quad n=0, \ \pm1, \ \pm2, \ldots$

365.

Naći one realne vrijednosti x koje zadovoljavaju nejednačinu:

$$|4i-1+\log_{0,5}x|\geqslant 5.$$

Rješenje. $0<x\leqslant\frac{1}{16}, \ x\geqslant 4.$

366.

Riješiti nejednačinu: $|1+4i-2^{-x}|\leqslant 5$, gdje je x realan broj.

Rješenje. $x\geqslant -2.$

367.

Riješiti jednačinu:

$$(\cos 2x+i\sin 2x)^3+(\cos x+i\sin x)^2-2=0,$$

gdje je x realan broj.

Rješenje. $x=k\pi, \quad k=0, \ \pm1, \ \pm2, \ldots$

368.

Riješiti nejednačinu:

$$1+\log_{0,5}\frac{|x+1+2i|-2}{\sqrt{2}-1}\geqslant 0,$$

gdje je x realan broj.

Rješenje. $-3\leqslant x<-1, \ -1<x\leqslant 1.$

369.

Dokazati da ni za koju realnu vrijednost m kompleksni broj:

$$\log_2(m^2-13m+44)-2+i\sqrt{\log_2 m-3}$$

ne može biti čisto imaginaran broj.

370.

Primjenom Moavrovog obrasca dokazati da je:

a) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$

b) $\sin 4x=4\cos^3 x\sin x-4\cos x\sin^3 x$

$\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1.$

371.

Koristeći binomni obrazac dokazati da je:

a) $(1+i)^4=-4,$

b) $(\sqrt{3}-i)^5=-16(\sqrt{3}+i),$

c) $(1+i\sqrt{3})^6=64.$

5. DETERMINANTE I SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

5.1. Determinante II reda

Rješavanjem sistema jednačina:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

dolazimo do njegovog rješenja:

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad (2)$$

$$y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Primjećuje se da je imenilac i kod x i kod y isti i jednak je:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Taj imenilac se može napisati i u obliku kvadratne šeme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (3)$$

(vrsta → ; kolona ↓)

koju zovemo *determinanta II reda.*

Brojevi $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ koji ulaze u sastav determinante zovu se *elementi* determinante i poredani su u *vrste* i *kolone.* Elementi a_{11} i a_{12} čine *prvu vrstu*, a a_{21} i a_{22} *drugu vrstu*, dok elementi a_{11} i a_{21} čine *prvu kolonu*, a a_{12} i a_{22} *drugu kolonu.*

Dijagonala koja polazi iz lijevog gornjeg, prema desnom donjem uglu determinante zove se *glavna dijagonala*, a ona koja polazi od lijevog donjeg, prema desnom gornjem uglu *sporedna dijagonala.*

Iz relacije (3) vidi se da se *vrijednost determinante* drugog reda dobija kada se od proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali oduzme proizvod elemenata na sporednoj dijagonali.

372.

Izračunajmo vrijednosti determinanti:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 3\cdot 5 = 18 - 15 = 3,$

2) $\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -4\cdot 7 - 2\cdot(-3) = -28 + 6 = -22,$

3) $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6\cdot(-1) - 2\cdot 0 = -6,$

4) $\begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{4}{25} - \frac{3}{20} = \frac{16-15}{100} = \frac{1}{100},$

5) $\begin{vmatrix} 0{,}8 & \frac{1}{4} \\ 0{,}6 & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}25 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}16 - 0{,}15 = 0{,}01,$

6) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 - a^2 b^2 = 0,$

7) $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} = n^2 - 1 - n^2 = -1,$

8) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab,$

9) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix} = a^3 - b^3 - (a^3 + b^3) = -2b^3,$

10) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = x^3 - 1 - x^3 = -1,$

11) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1,$

12) $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \dfrac{(1-t^2)^2-4t^2}{(1+t^2)^2} = -1,$

13) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$

14) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix} = \sin x \cos y - \sin y \cos x = \sin(x-y),$

15) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix} = \cos x \cos y - \sin y \sin x = \cos(x+y)$

16) $\begin{vmatrix} \sin x + \sin y & \cos y + \cos x \\ \cos y - \cos x & \sin x - \sin y \end{vmatrix} = \sin^2 x - \sin^2 y - (\cos^2 y - \cos^2 x) = 0$

17) $\begin{vmatrix} 2\sin x \cos x & 2\sin^2 x - 1 \\ 2\cos^2 x - 1 & 2\sin x \cos x \end{vmatrix} = 1,$

18) $\begin{vmatrix} \sin 37^\circ & \sin 7^\circ \\ \cos 37^\circ & \cos 7^\circ \end{vmatrix} = \sin 37^\circ \cos 7^\circ - \cos 37^\circ \sin 7^\circ =$

$= \sin(37^\circ - 7^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2},$

19) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix} = ab - (c^2 - d^2 i^2) = ab - c^2 - d^2, \quad (i^2 = -1),$

20) $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix} = a^2 - b^2 i^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2,$

21) $\begin{vmatrix} \cos x + i\sin x & 1 \\ 1 & \cos x - \sin x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0$

22) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$

373.

Izračunati vrijednost determinante:

$$\begin{vmatrix} w & w \\ -1 & w \end{vmatrix}, \text{ ako je } w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} w & w \\ -1 & w \end{vmatrix} = w^2 + w = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1.$$

374.

Napisati u obliku determinante izraze:

1) $x_1 y_2 - x_2 y_1$, 2) $b^2 - 4ac$, 3) $a - b$,

4) $m^2 + n^2$, 5) $\log\dfrac{a}{b}$, 6) m^2,

7) $\sin(x+y)$, 8) $\sin(x-y)$, 9) $\cos(x+y)$,

10) $\cos(x-y)$ 11) $\log(m \cdot n)$, 12) $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

Rješenje.

1) $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, 2) $b^2 - 4ac = \begin{vmatrix} b & 2c \\ 2a & b \end{vmatrix}$,

3) $a - b = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, 4) $m^2 + n^2 = \begin{vmatrix} m & n \\ -n & m \end{vmatrix}$,

5) $\log\dfrac{a}{b} = \log a - \log b = \begin{vmatrix} \log a & 1 \\ \log b & 1 \end{vmatrix}$, 6) $m^2 = m \cdot m = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}$,

7) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y = \begin{vmatrix} \sin x & -\sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}$,

8) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}$,

9) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \begin{vmatrix} \cos x & \sin y \\ \sin x & \cos y \end{vmatrix}$,

10) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin y \\ \sin x & \cos y \end{vmatrix}$,

11) $\log(m \cdot n) = \log m + \log n = \begin{vmatrix} \log m & -1 \\ \log n & 1 \end{vmatrix}$,

12) $a^2 + b^2 - c^2 = a^2 - (c-b)(c+b) = \begin{vmatrix} a & c+b \\ c-b & a \end{vmatrix}$.

375.

Riješimo sljedeće jednačine date u obliku determinante:

1) $\begin{vmatrix} 3x & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 26, \quad -15x - 4 = 26, \quad x = -2,$

2) $\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 8 & -2x \end{vmatrix} = 0, \quad 2x^2 - 8 = 0, \quad x_{1,2} = \pm 2,$

3) $\begin{vmatrix} 4 & x \\ x^2 & 16 \end{vmatrix} = 0, \quad 64 - x^3 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_{2,3} = 2(-1 \pm i\sqrt{3}),$

4) $\begin{vmatrix} \log x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \log x - 6 = 0, \quad \log x = 6, \quad x = 10^6.$

376.

Riješiti jednačinu: $\begin{vmatrix} 2x & -3x \\ 5 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x-1 & -4 \\ 4 & x \end{vmatrix}.$

Rješenje.

$$2x^2 - 6x + 15x = 2x^2 - x + 16$$
$$8x = 16$$
$$x = 2.$$

377.

Riješiti jednačinu:

$$\begin{vmatrix} 3y-1 & \frac{1}{2}(3+3y) \\ 4y & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -y & -1 \\ 1 & 3y \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenje:

$$3y^2 - y - 2y(3+3y) - (-3y^2+1) = 0$$
$$-7y - 1 = 0$$
$$y = -\frac{1}{7}.$$

378.

Za koje vrijednosti x determinanta $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ je jednaka dvostrukoj determinanti $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$?

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$4x + 3 = 2(6+1)$$
$$4x = 11$$
$$x = \frac{11}{4}.$$

379.

Za koje vrijednosti parametra m jednačina:

$$\begin{vmatrix} 5x-1 & 2 \\ 3m & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ima korijen } -\frac{3}{2}?$$

Rješenje.

$$-5x + 1 - 6m = 0$$

Za $x = -\frac{3}{2}$ imamo

$$-5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 - 6m = 0$$
$$m = \frac{17}{12}.$$

380.

Riješiti nejednačinu:

$$\begin{vmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} < 1 + \sqrt{3}.$$

Rješenje.

$$2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 < 1 + \sqrt{3}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sa trigonometrijske kružnice se vidi da je nejednakost zadovoljena za:

$$2k\pi + \frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{3} - x < 2k\pi + \frac{7\pi}{3}, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<-x<2k\pi+2\pi$$

$$-2k\pi-2\pi<x<-2k\pi-\frac{\pi}{3}$$

$$-2\pi(k+1)<x<-2\pi(k+1)+\frac{5\pi}{3}$$

ili

$$2k\pi<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}.$$

381.

Riješiti nejednačinu:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \end{vmatrix}<2.$$

Rješenje.

$$2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+1<2 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$$

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$$

$$2k\pi+\frac{2\pi}{3}<\frac{x}{2}<2k\pi+2\pi,$$

$$2k\pi+\frac{2\pi}{3}<\frac{x}{2}<2\pi(k+1),$$

$$4k\pi+\frac{4\pi}{3}<x<4\pi(k+1), \quad (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots).$$

382.

Izračunati:

$$\frac{\begin{vmatrix} a & -2 \\ a & 3 \end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix} 3a+b & 2 \\ -2 & 4b \end{vmatrix}}{3a-2}, \quad 3a-2\neq 0.$$

Rješenje.

$$\frac{(3a+2b)^2-(12ab+4b^2+4)}{3a-2}=$$

$$=\frac{9a^2+12ab+4b^2-12ab-4b^2-4}{3a-2}=$$

$$=\frac{9a^2-4}{3a-2}=\frac{(3a-2)(3a+2)}{3a-2}=3a+2.$$

383.

Izračunati:

$$\frac{\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & 2b \\ -2a & 2b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & b \\ -1 & a \end{vmatrix}}, \quad 2a+b\neq 0.$$

Rješenje.

$$\frac{4a^2-b^2+2b^2+4ab}{2a+b}=\frac{4a^2+4ab+b^2}{2a+b}=$$

$$=\frac{(2a+b)^2}{2a+b}=2a+b.$$

5.2. Determinante III reda

Rješavanjem sistema jednačina:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3,$$

dolazimo do njegovog rješenja koje glasi:

$$x=\frac{a_{22}a_{33}b_1+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2-a_{23}a_{32}b_1-a_{12}a_{33}b_2-a_{22}a_{13}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$y=\frac{a_{11}a_{33}b_2+a_{31}a_{23}b_1+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-a_{21}a_{33}b_1-a_{13}a_{31}b_2}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$z=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}a_{31}b_2+a_{21}a_{32}b_1-a_{11}b_{32}b_2-b_{12}a_{21}b_3-a_{31}a_{22}b_1}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}},$$

uz uslov da je zajednički izraz u imeniocima $\neq 0$.

Zajednički izraz u imeniocima prednjih rješenja može se šematski napisati u obliku kvadratne šeme od 9 elemenata:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

koja se zove *determinanta III reda.*

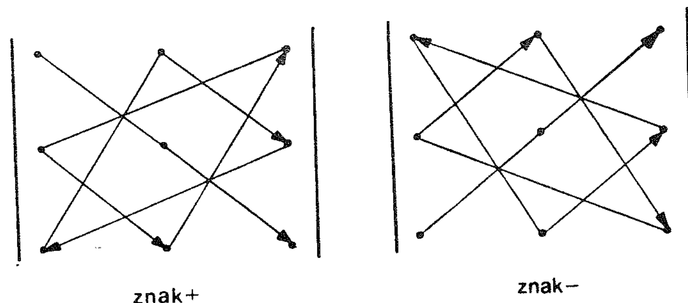
13*

Determinanta III reda ima 3 vrste i 3 kolone. Dupli indeksi elemenata imaju ranije uvedeno značenje, tako na primjer a_{32} označava element koji pripada III vrsti a drugoj koloni.

Vrijednost determinante III reda može se dobiti na više načina. Mi ćemo navesti samo dva koji su najčešće u upotrebi.

5.2.1 *Pravilo trougla ili Sarusovo pravilo*

Po ovom pravilu vrijednost determinante trećeg reda izračuna se kao algebarski zbir proizvoda od po tri elementa uzeta po sljedećoj šemi:



Sa znakom (+) uzimaju se elementi koji leže na glavnoj dijagonali $a_{11}a_{22}a_{33}$ i u vrhovima dva trougla koji imaju po jednu stranu paralelnu ovoj dijagonali (vidi sliku). Sa znakom (−) uzimaju se elementi koji leže na sporednoj dijagonali $a_{31}a_{22}a_{13}$ i u vrhovima dva trougla (vidi sliku) koji imaju po jednu stranu paralelnu ovoj dijagonali.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}- -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Navedeno pravilo trougla vrijedi za izračunavanje samo determinanti III reda.

384.

Izračunati vrijednost determinante primjenom pravila trougla:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 8 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot6+2\cdot5\cdot3+1\cdot2\cdot8-8\cdot4\cdot3-5\cdot2\cdot3- -2\cdot1\cdot6=72+30+16-96-30-12= =118-138=-20.$$

385.

Izračunati vrijednost determinante primjenom pravila trougla:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-i & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1+(-1)\cdot1\cdot(1+i)+i\cdot0\cdot(1-i)- -(1-i)\cdot1\cdot(1+i)-1\cdot0\cdot1-(-1)\cdot i\cdot1= =1-1-i+0-(1-i^2)-0+i=-i- -2+i=-2.$$

5.2.2. *Razvijanje determinante po elementima jedne vrste ili jedne kolone*

Ako elemente determinante trećeg reda označimo sa dva indeksa (a_{ij}), tj. ako je napišemo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

pri čemu prvi indeks (i) označava vrstu, a drugi (j) kolonu, onda svaki element ima svoje mjesto u šemi. Ova mjesta nazivamo ili *parna* (označavamo ih sa +), ili *neparna* (označavamo ih sa −), što zavisi od toga da li je zbir indeksa $(i+j)$ *paran* ili *neparan* broj. Tako na primjer, element a_{31} je na parnom mjestu (+), dok je element a_{12} na neparnom mjestu (−).

Ako se iz šeme determinante izostave elementi i-te vrste i j-te kolone, preostali elementi čine determinantu čiji je red za jedan niži od reda prolazne determinante, a ta determinanta naziva se *subdeterminanta* ili *minor* elemenata a_{ij} i označava se sa

$$M_{ij}.$$

Tako na primjer, subdeterminanta elementa a_{12} iz prethodne determinante je:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ako je element na parnom mjestu, onda je njegova subdeterminanta predznaka (+), a ako je na neparnom mjestu onda je predznak (−).

Subdeterminanta nekog elementa (a_{ij}) zajedno sa svojim predznakom zove se *algebarski komplement* ili *kofaktor* i obilježava sa

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Na osnovu svega što je naprijed navedeno, možemo definisati razvijanje determinante po njenim vrstama i kolonama. Razvoj determinante po prvoj vrsti izgledao bi ovako:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Dakle, vrijednost determinante trećeg reda se dobija ako se pomnože elementi jedne vrste (u našem slučaju prve vrste) ili jedne kolone, sa odgovarajuć m kofaktorima i to sabere.

Ovo pravilo za izračunavanje vrijednosti determinanata trećeg reda zove se Laplasovo pravilo.

Laplasovo pravilo vrijedi za izračunavanje vrijednosti determinanata bilo kojeg reda počev od trećeg pa nadalje.

386.

Izračunati vrijednost determinante razvijanjem po elementima treće vrste:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-12) - 5(2-24) + 2(4-4) = -33 + 110 + 0 = 77.$$

Napomena: Kad razvijamo determinantu po vrsti ili koloni, treba to učiniti po onoj vrsti ili koloni u kojoj se nalaze jedinice ili nule kao pojedini elementi jer se na taj način račun pojednostavljuje.

387.

Izračunati vrijednost determinante razvijanjem po elementima druge vrste (zašto)?

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -0\cdot\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (25-21) - 2(20-42) = 4 + 44 = 48.$$

388.

Riješiti jednačinu:

$$\begin{vmatrix} x & x-2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenje.

Razvijmo determinantu po elementima treće kolone:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & x-2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + x\cdot\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$20 - 6 - (4x - 2x + 4) + x(3x - 5x + 10) = 0$$

$$14 - 2x - 4 - 2x^2 + 10x = 0$$

$$2x^2 - 8x - 10 = 0 \quad /:2$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -1.$$

389.

Izračunati vrijednost determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}.$$

Rješenje.

Razvijmo datu determinantu po elementima prve vrste:

$$\sin 2x\begin{vmatrix} -\cos x & \cos x \\ \sin x & \sin x \end{vmatrix} + \cos 2x\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \sin 2x\cdot(-2\sin x\cos x) + \cos 2x(\sin^2 x - \cos^2 x) +$$

$$+ (\sin^2 x + \cos^2 x) = -\sin^2 2x - \cos^2 2x + 1 =$$

$$= -(\sin^2 2x + \cos^2 2x) + 1 = -1 + 1 = 0.$$

390.

Analitičku formulu za površinu trougla napisati u obliku determinante.

Rješenje.

$$2p = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) =$$

$$= x_1\cdot\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_2\cdot\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\cdot\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

391.

Pokazati da je:

$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

Rješenje.

Ako datu determinantu razvijemo po Sarusovom pravilu imaćemo da je:

$$D=(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)+a^2b^2c^2+a^2b^2c^2-a^2c^2(c^2+a^2)-$$
$$-b^2c^2(b^2+c^2)-a^2b^2(a^2+b^2)=(b^2c^2+c^4+a^2b^2+a^2c^2)$$
$$(a^2+b^2)+2a^2b^2c^2-a^2c^4-a^4c^2-b^4c^2-b^2c^4-a^4b^2-a^2b^4=$$
$$=a^2b^2c^2+a^2c^4+a^4b^2+a^4c^{22}+b^4c^2+b^2c^4+a^2b^4+$$
$$+a^2b^2c^2+2a^2b^2c^2-a^2c^4-a^4c^2-b^4c^2-b^2c^4-$$
$$-a^4b^2-b^2b^4=4a^2b^2c^2.$$

392.

Riješiti jednačinu:

$$\begin{vmatrix} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1-a \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}-2}{4}.$$

Rješenje. Datu determinantu treba razviti po elementima prve kolone, pa onda primijeniti relaciju:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\beta\sin\alpha$$

tj.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x).$$

Dakle, razvijemo li po elementima prve kolone dobija se:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ a & 1-a \end{vmatrix}-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ a & 1-a \end{vmatrix}+$$
$$+\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\{\cos x-a\cdot\cos x-a\cdot\sin x-\sin x+a\cdot\sin x+$$
$$+a\cdot\cos x\}+\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)+(\sin^2 x-\cos^2 x)=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)-(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\cos 2x=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\cos 2x=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}-2}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

$$\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

393.

Riješiti nejednačinu:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ x & 3 & 1 \end{vmatrix}>0.$$

Rješenje. Razvijemo li determinantu po pravilu trougla dobićemo:

$$-x^2+3>0/\cdot(-1)$$
$$x^2-3<0$$
$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})<0$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	
$x+\sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$	
R	$+$	$-$	$+$	

$$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.$$

394.

Izračunati vrijednost determinante:

$$D=\begin{vmatrix} a^{-4} & a^{-3} & a^{-2} \\ a^{-1} & 1 & a \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Razvijemo li datu determinantu D po pravilu trougla dobićemo da je:

$$D=1+1+1-1-1-1=0.$$

395.

Pokazati da je:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ \cos x & 1 & 0 \\ g & f & r^2 \end{vmatrix}=(r \sin x)^2.$$

Rješenje. Razvijemo li datu determinantu D po elementima treće kolone dobićemo:

$$D=r^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ \cos x & 1 \end{vmatrix}=r^2(1-\cos^2 x)=r^2 \sin^2 x=(r \sin x)^2.$$

396.

Pokazati da je:

$$D=\begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x & 1 \\ \sin 2x & \cos 2x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \end{vmatrix}=4 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Rješenje. Razvijemo li datu determinantu po elementima treće kolone dobićemo da je:

$$D=\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix}=$$

$$=(\sin 2x \cos x-\cos 2x \sin x)-(\sin 3x \cos x-\cos 3x \sin x)+$$

$$+(\sin 3x \cos 2x-\cos 3x \sin 2x)=\sin(2x-x)-\sin(3x-x)+$$

$$+\sin(3x-2x)=\sin x-\sin 2x+\sin x=2 \sin x-\sin 2x=$$

$$=2 \sin x-2 \sin x \cos x=2 \sin x(1-\cos x)=$$

$$2 \sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}=4 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

397.

Pokazati da je:

$$D=\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=-2(x^3+y^3).$$

Rješenje. Razvijmo datu determinantu D po pravilu trougla, tj.:

$$D=xy(x+y)+xy(x+y)+xy(x+y)-(x+y)^3-x^3-y^3=$$

$$=3x^2y+3xy^2-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3-x^3-y^3=$$

$$=2x^3-2y^3=-2(x^3+y^3).$$

398.

Izračunati vrijednost determinante:

$$D=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a+1 & a \\ -a & a+1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a+1 & a \\ -a & a-1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a+1 & a \\ -a & a-1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a-1 & a \\ -a & a-1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} (a+1)^2+a^2 & a^2+1+a^2 \\ a^2-1+a^2 & (a-1)^2+a^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a^2+2a+1 & 2a^2+1 \\ 2a^2-1 & 2a^2-2a+1 \end{vmatrix}=$$

$$=4a^4+4a^3+2a^2-4a^3-4a^2-2a+2a^2+2a+1-$$

$$-4a^4+2a^2-2a^2+1=2.$$

399.

Pokazati da je:

$$D=\begin{vmatrix} -\dfrac{bc}{b+c} & b & c \\ a & -\dfrac{ca}{c+a} & c \\ a & b & -\dfrac{ab}{a+b} \end{vmatrix}=\frac{(bc+ca+ab)^3}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{bc}{b+c} & b & c \\ a & -\dfrac{ca}{c+a} & c \\ a & b & -\dfrac{ab}{a+b} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{bc(a+c)(b+a)(ab+ac+bc)+ac(a+b)(b+c)(ab+ac+bc)+a^2b^2(ab+bc+ac)}{(b+c)(c+a)(a+b)} =$$

$$= \frac{(ab+bc+ac)(ab+ac+bc)(bc+ac)+a^2bc+b^2ac+a^2b^2}{(b+c)(c+a)(a+b)} =$$

$$= \frac{(ab+bc+ac)^2(bc+ac+ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)} = \frac{(ab+bc+ac)^3}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

400.

Ako je $a+b+c=180^\circ$ pokazati da je:

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} a & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{tg} b & 1 \\ 1 & 1 & \operatorname{tg} c \end{vmatrix} = 2.$$

Rješenje.

$$D = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + 1 + 1 - \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} c =$$

$$= 2 - \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c =$$

$$= 2 - (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) - \operatorname{tg} c\,(1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{Iz relacije:} \\ \operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \\ \text{slijedi da je:} \\ 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}(a+b)} \end{array}\right\} = 2 - (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) - \operatorname{tg} c \cdot \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}(a+b)} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{Iz uslova zadatka imamo da je:} \\ a+b+c = 180^\circ\text{C} \\ \text{tj.}\quad a+b = 180^\circ - c, \text{ pa je} \\ \operatorname{tg}(a+b) = \operatorname{tg}(180^\circ - c) = -\operatorname{tg} c \end{array}\right\} = 2 - (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) - \operatorname{tg} c \cdot$$

$$\cdot \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{-\operatorname{tg} c} = 2 - (\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a) + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) = 2.$$

5.3. Osobine determinanata

Radi lakšeg izračunavanja determinanata, korisno je upoznati njihove osobine. One se mogu i dokazati, ali mi ćemo ih pokazati na determinantama trećeg reda, imajući u vidu da navedene osobine važe i za determinante ma kog reda.

1) Vrijednost determinante se ne mijenja, ako sve vrste po redu zauzmu položaj kolona po redu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ovaj postupak se zove *transpozicija* ili preklapanje preko glavne dijagonale. Determinanta dobijena transpozicijom zove se *transponovana determinanta.*

2) Determinanta mijenja svoj znak, ako u njoj bilo koje dvije vrste ili bilo koje dvije kolone međusobno zamjene mjesta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3) Determinanta je jednaka nuli, ako su u njoj elementi jedne vrste (odnosno kolone) jednaki sa elementima neke druge vrste (odnosno kolone):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4) Determinanta se množi ili dijeli jednim brojem k, ako se tim brojem pomnože ili podijele svi elementi jedne vrste ili jedne kolone:

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5) Ako su u determinanti elementi jedne vrste ili jedne kolone proporcionalni sa odgovarajućim elementima druge vrste ili kolone, determinanta je jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6) Ako su svi elementi jedne vrste (odnosno kolone) jednaki nuli, vrijednost determinante je jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7) Ako su u determinanti elementi neke kolone (odnosno vrste) dati kao zbir dva sabirka (ili istog konačnog broja sabirka), tada je ona jednaka zbiru dvije determinante (ili zbiru konačnog broja determinanata) istog reda kao i data determinanta, a koje se formiraju zadržavanjem po jednog sabirka iz svakog elementa te kolone (odnosno vrste) i dopisivanjem elemenata ostalih kolona (odnosno vrsta) istim redom kao i u datoj determinanti, tj.:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8) Vrijednost determinante se ne mijenja, ako elementima jedne kolone (odnosno vrste) dodamo odgovarajuće elemente ma koje kolone (odnosno vrste) pomnožene jednim istim brojem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\text{Elementima I kolone} \\ \text{dodajmo elemente II} \\ \text{kolone pomnožene sa } k.\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\text{U posljednjoj determinanti je} \\ \text{I kolona proporcionalna II} \\ \text{koloni, pa je determinanta} \\ \text{jednaka nuli, te je:}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

401.

Izračunati vrijednost determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b & a & b & 1 \\ a & -a & b & 1 \\ b & -b & a & 1 \end{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\text{Prvu vrstu oduzmimo} \\ \text{od ostalih vrsta}\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b-a & a-b & b-a & 0 \\ 0 & -a-b & b-a & 0 \\ b-a & -b-b & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ -(a-b) & (a-b) & -(a-b) & 0 \\ 0 & -(a+b) & -(a-b) & 0 \\ -(a-b) & -2b & 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\text{Razvijmo dobijenu deter-} \\ \text{minantu} \quad \text{V koloni}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -(a-b) & a-b & -(a-b) \\ 0 & -(a+b) & -(a-b) \\ -(a-b) & -2b & 0 \end{vmatrix} = -[(a-b)^3 + (a-b)^2 \cdot (a+b) +$$

$$+2b(a-b^2)] = -(a-b)^2 \cdot (a-b+a+b+2b) = -(a-b)^2(2a+2b) =$$

$$= -2(a-b)^2(a+b).$$

402.

Izračunati vrijednost determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & a & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\text{Oduzmimo od I kolone II} \\ \text{kolonu, a od III kolone IV}\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} a-b & b & a-b & b \\ b-a & a & a-b & b \\ a-b & b & 0 & a \\ b-a & a & b-a & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a-b) & b & (a-b) & b \\ -(a-b) & a & (a-b) & b \\ (a-b) & b & 0 & a \\ -(a-b) & a & -(a-b) & a \end{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\text{Iz I i III kolone izvucimo} \\ \text{zajednički faktor } (a-b)\end{matrix}\right\} =$$

$$= (a-b)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & 1 & b \\ -1 & a & 1 & b \\ 1 & b & 0 & a \\ -1 & a & -1 & a \end{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\text{Oduzmimo od II} \\ \text{kolone IV.}\end{matrix}\right\} =$$

$$= (a-b)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ -1 & (a-b) & 1 & b \\ 1 & -(a-b) & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\text{Iz II kolone izvucimo} \\ \text{zajednički faktor } (a-b)\end{matrix}\right\} =$$

$$= (a-b)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Razvijmo dobijenu deter-} \\ \text{minantu po II koloni} \end{Bmatrix} =$$

$$= (a-b)^3 \cdot \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & a \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ -1 & 1 & b \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \text{Razvijmo dobijene} \\ \text{determinante po} \\ \text{pravilu trougla} \end{Bmatrix} =$$

$$= (a-b)^3(-a-b+a-a+a+b-b+b+a+b) = (a-b)^3(a+b).$$

403.

Dokazati da je:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Pomnožimo I vrstu} \\ \text{sa } a, \text{ II sa } b \text{ i III} \\ \text{sa } c. \end{Bmatrix} = \frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{c} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \text{Iz I kolone izvucimo} \\ \text{zajednički faktor } abc \end{Bmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

404.

Dokazati da je:

$$\frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

Dokaz:

$$\frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Pomnožimo I kolonu sa} \\ a, \text{ II kolonu sa } b, \text{ III} \\ \text{kolonu sa } c. \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a(b^2+c^2) & ab^2 & c^2a \\ a^2b & b(c^2+a^2) & bc^2 \\ ca^2 & b^2c & c(a^2+b^2) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Iz I vrste izvucimo} \\ \text{faktor } a, \text{ iz II } b \\ \text{i iz III faktor } c. \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Oduzmimo zbir II i III} \\ \text{kolone od I kolone} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ -2c^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ -2b^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ -c^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ -b^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \text{Saberimo I} \\ \text{kolonu sa II i} \\ \text{sa III kolonom} \end{Bmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ -c^2 & a^2 & 0 \\ -b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

405.

Dokazati da je:

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

Dokaz:

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Dodajmo elementima} \\ \text{I kolone odgovarajuće} \\ \text{elemente II i III kolone} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Iz I kolone izvucimo} \\ \text{zajednički faktor} \\ 2(a+b+c) \end{Bmatrix} =$$

$$= 2(a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Oduzmimo od} \\ \text{elemenata II i III} \\ \text{vrste odgovarajuće} \\ \text{elemente I vrste} \end{Bmatrix} =$$

$$= 2(a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

406.

Dokazati da je:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Dokaz:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{Bmatrix}\text{Dodajmo elementima I} \\ \text{vrste odgovarajuće ele-} \\ \text{mente II i III vrste.}\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{Bmatrix}\text{Iz I vrste izvucimo} \\ \text{zajednički faktor} \\ (a+b+c)\end{Bmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{Bmatrix}\text{Prvu kolonu pomnoženu} \\ \text{sa } (-1) \text{ dodajmo II, a} \\ \text{zatim i III koloni}\end{Bmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \begin{Bmatrix}\text{Razvijmo dobijenu} \\ \text{determinantu po} \\ \text{elementima I vrste}\end{Bmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+b+c)^2 =$$

$$= (a+b+c)^3.$$

407.

Dokazati da je:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz: Služeći se osobinom (7) datu determinantu možemo napisati kao zbir dvije determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & a^3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a^3 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\text{Kod obje determinante oduzmimo} \\ \text{I vrstu od II i od III vrste}\end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a^2-a & a^3-a^2 \\ 0 & a^3-a & a-a^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & a^2-a & a-a^3 \\ 0 & a^3-a & a^2-a^3 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix}\text{Razvijmo obje determinante} \\ \text{po elementima I kolone}\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a(a-1) & a^2(a-1) \\ a(a-1)(a+1) & -a(a-1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(a-1) & -a(a-1)(a+1) \\ a(a-1)(a+1) & -a^2(a-1) \end{vmatrix} =$$

$$= a^2(a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix} + a^2(a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -(a+1) \\ a+1 & -a \end{vmatrix} =$$

$$a^2(a-1)^2(-1-a^2-a-a+a^2+2a+1) = 0.$$

408.

Dokazati da je:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Rješenje. Oduzmimo prvu vrstu od druge i treće vrste, pa dobijenu determinantu razvijmo po elementima prve kolone.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a).$$

409.

Dokazati da je:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Pomnožimo li prvu vrstu sa a, drugu sa b i treću sa c dobićemo:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

14*

410.

Pokazati da je:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(a-b)(b-c)(a-c).$$

Rješenje. Množenjem elemenata prve kolone determinante na lijevoj strani sa (-1) i dodavanjem drugoj i trećoj koloni dobijamo:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 & 2b+1 & b+1 \\ c^2 & 2c+1 & c+1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & a+1 \\ b^2 & b & b+1 \\ c^2 & c & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^2-a^2 & c-a & 0 \end{vmatrix} = 4(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b+a & 1 & 0 \\ c+a & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(b-a)(c-a)(b-c) = (a-b)(b-c)(a-c).$$

5.4. Rješavanje sistema dvije linearne nehomogene jednačine sa dvije nepoznate

Sistem linearnih jednačina je *nehomogen* ako u njemu postoji bar jedna jednačina u kojoj, pored članova sa nepoznatim, figuriše bar jedan član bez nepoznate različit od nule. U protivnom, sistem se zove *homogen*.

411.

Sistem jednačina:

$$2x+3y=3$$
$$x-y=-2$$

je nehomogen, dok je sistem jednačina:

$$3x+2y=0$$
$$x-7y=0,$$

homogen.

Ako je dat nehomogen sistem od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2, \qquad (1)$$

onda je njegovo rješenje dato Kramerovim obrascima:

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \qquad (D\neq 0) \qquad (2)$$

pri čemu je:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Posmatrajući rješenja (2) napisana u obliku količnika determinanti, vidi se da su oba imenioca jednaka D i da je ta determinanta obrazovana od koeficijenta uz nepoznate. Tako formirana determinanta D zove se *determinanta sistema.*

Determinante u brojiocima, D_x i D_y, dobijaju se iz determinante sistema D zamjenom koeficijenata uz traženu nepoznatu slobodnim članovima c_1 i c_2.

Kod rješavanja nehomogenog sistema od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate, mogu se pojaviti sljedeći slučajevi:

1. Kada je determinanta sistema $D\neq 0$, sistem jednačina (1) *ima jedno određeno rješenje* dato Kramerovim obrascima (2) bez obzira na vrijednosti D_x i D_y. Za jednačine takvog sistema kažemo da su *saglasne.* Geometrijski posmatran ovaj slučaj znači da jednačine sistema (1) predstavljaju dvije prave koje se sijeku u tački:

$$P\left(x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}\right).$$

2. Kada je determinanta sistema $D=0$, a bar jedna od determinanti D_x i D_y različita od nule, onda sistem (1) *nema rješenja*, a za jednačine kažemo da su *protivurječne*, tj. što jedna jednačina tvrdi, to druga poriče. Geometrijski interpretiran ovaj slučaj znači da jednačine sistema predstavljaju dvije paralelne prave.

3. Kada je $D=D_x=D_y=0$, onda sistem jednačina (1) *ima beskonačno mnogo rješenja*, a za jednačine kažemo da su *zavisne*, tj. što jedna tvrdi to tvrdi i druga. Geometrijski tretiran ovaj slučaj znači da jednačine sistema (1) predstavljaju dvije prave koje se poklapaju.

412.

Riješiti sistem jednačina:

$$2x+3y-3=0$$
$$x-y+2=0.$$

Rješenje. Prije rješavanja sistema potrebno ga je dovesti na oblik (1):

$$2x+3y=3$$
$$x-y=-2.$$

Da bismo primijenili Kramerove obrasce (2), treba izračunati vrijednosti determinanti D, D_x, D_y koje se formiraju na način (3):

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{vmatrix}=-5,\quad D_x=\begin{vmatrix}3 & 3\\-2 & -1\end{vmatrix}=3,\quad D_y=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -2\end{vmatrix}=-7.$$

Prema tome, rješenje datog sistema jednačina glasi:

$$x=\frac{D_x}{D}=-\frac{3}{5},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{7}{5}.$$

S obzirom da je determinanta sistema $D=-5\neq 0$, to je dobijeno rješenje jednoznačno, a za jednačine kažemo da su saglasne.

413.

Riješiti sistem jednačina:

$$2x+3y=3.$$
$$2x+3y=1.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\2 & 3\end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix}3 & 3\\1 & 3\end{vmatrix}=6,\quad D_y=\begin{vmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{vmatrix}=-4.$$

Pošto je determinanta datog sistema $D=0$, a $D_x=6\neq 0$ i $D_y=-4\neq 0$, to sistem jednačina nema rješenje, a za jednačine kažemo da su protivurječne, jer prva jednačina tvrdi da je $2x+3y=3$, dok druga to poriče i tvrdi da je $2x+3y=1$.

414.

Riješiti sistem jednačina:

$$3x+6y=12$$
$$2x+4y=8.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}3 & 6\\2 & 4\end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix}12 & 6\\8 & 4\end{vmatrix}=0,\quad D_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\2 & 8\end{vmatrix}=0.$$

Pošto je $D=D_x=D_y=0$, to dati sistem jednačina ima beskonačno mnogo rješenja, za jednačine kažemo da su zavisne. Zaista, ako prvu jednačinu podijelimo sa 3, a drugu sa 2 dobićemo sistem:

$$x+2y=4$$
$$x+2y=4.$$

Kao što se vidi, ovdje se radi o jednoj jednačini sa dvije nepoznate, pa za proizvoljno x dobijamo određenu vrijednost za y. Pošto to možemo učiniti na beskonačno različitih načina, to kažemo da dati sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

415.

Riješiti sistem jednačina:

$$x+y=a+b$$
$$bx+ay=2ab.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1\\b & a\end{vmatrix}=a-b,\quad D_x=\begin{vmatrix}a+b & 1\\2ab & a\end{vmatrix}=a^2-ab=a(a-b),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & a+b\\b & 2ab\end{vmatrix}=ab-b^2=b(a-b).$$

Prema tome, rješenje datog sistema glasi:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{a(a-b)}{a-b}=a,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{a(a-b)}{a-b}=b,$$

ako je $a\neq b$. Za $a=b$ sistem jednačina ima beskonačno mnogo rješenja.

416.

Riješiti sistem jednačina:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$
$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & \frac{1}{b}\\ \frac{1}{b} & \frac{1}{a}\end{vmatrix}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\quad\frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2},$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{b}\\ 1 & \frac{1}{a}\end{vmatrix}=\frac{b-a}{ab},\quad D_y=\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & 1\\ \frac{1}{b} & 1\end{vmatrix}=\frac{b-a}{ab}$$

$$x=\frac{ab}{a+b}, \quad y=\frac{ab}{a+b}, \quad a+b\neq 0, \; a\neq 0, \quad b\neq 0.$$

Za $a+b=0$, tj. za $a=-b$ sistem nema rješenja.

417. Riješiti sistem jednačina:

$$x \operatorname{tg}\alpha + y = \sin(\alpha+\beta)$$
$$x - y\cdot\operatorname{tg}\alpha = \cos(\alpha+\beta)$$

gdje je $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, ($k$ – cijeli broj).

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}\operatorname{tg}\alpha & 1\\ 1 & -\operatorname{tg}\alpha\end{vmatrix}=-\operatorname{tg}^2\alpha-1=-(1+\operatorname{tg}^2\alpha),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\sin(\alpha+\beta) & 1\\ \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{tg}\alpha\end{vmatrix}=-[\sin(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\operatorname{tg}\alpha & \sin(\alpha+\beta)\\ 1 & \cos(\alpha+\beta)\end{vmatrix}=-[\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha].$$

U daljem radu primijenićemo sljedeće trigonometrijske relacije:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Prema tome imamo:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-[\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha+\cos(\alpha+\beta)]}{-(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}[\sin(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha+\cos(\alpha+\beta)]=$$

$$=\cos^2\alpha\,[\sin(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha+\cos(\alpha+\beta)]=$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha\sin\alpha+\cos^2\alpha\cos(\alpha+\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+$$

$$+\cos\alpha\sin\beta)\cos\alpha\sin\alpha+\cos^2\alpha\,(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$

$$=\sin^2\alpha\cos\alpha\cos\beta+\cos^3\alpha\cos\beta=(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\cos\beta+$$

$$+\cos^3\alpha\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta-\cos^3\alpha\cos\beta+\cos^3\alpha\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta$$

$\underline{x=\cos\alpha\cos\beta,}$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot[\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha]=\cos^2\alpha\cdot[\sin(\alpha+\beta)-$$

$$-\cos(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha]=\cos^2\alpha\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=\cos^2\alpha\,(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)-(\cos\alpha\cos\beta-$$

$$-\sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha\cos\alpha=\cos^2\alpha\sin\alpha\cos\beta+\cos^3\alpha\sin\beta-$$

$$-\cos^2\alpha\sin\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha\sin\beta\cos\alpha=\cos^3\alpha\sin\beta+$$

$$+(1-\cos^2\alpha)\sin\beta\cos\alpha=\cos^3\alpha\sin\beta+\sin\beta\cos\alpha-\cos^3\alpha\sin\beta.$$

$\underline{y=\sin\beta\cos\alpha.}$

418. U funkciji $y=ax^2+bx+c$ odrediti a, b i c tako da tačke $M_1(0,6)$, $M_2(2,12)$ i $M_3(-3,-18)$ pripadaju grafu te funkcije.

Rješenje. Ako tačke M_1, M_2 i M_3 pripadaju krivoj, određenoj datom funkcijom, onda njihove koordinate zadovoljavaju jednačinu

$$y=ax^2+bx+c$$

pa je:

$$\left.\begin{aligned}6&=c\\ 12&=4a+2b+c\\ -18&=9a-3b+c\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}2a+b&=3\\ 3a-b&=-8.\end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema jednačina su traženi koeficijenti a i b.

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5, \quad D_a=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -8 & -1\end{vmatrix}=5, \quad D_b=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -8\end{vmatrix}=-25,$$

$$a=\frac{D_a}{D}=-1, \quad b=\frac{D_b}{D}=5.$$

Prema tome, funkcija koja udovoljava zahtjevima zadatka glasi:

$$y=-x^2+5x+6.$$

419.

Za koje će vrijednosti parametra t rješenje sistema jednačina:

$$x\cos^2 t + y = 3$$

$$x\sin^2 t - y = 3$$

zadovoljiti jednačinu $8y^2 - x^2 = 36$?

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} \cos^2 t & 1 \\ \sin^2 t & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_y = \begin{vmatrix} \cos^2 t & 3 \\ \sin^2 t & 3 \end{vmatrix} = 3\cos 2t$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 6, \quad y = \frac{D_y}{D} = -3\cos 2t.$$

Ako dobijene vrijednosti za x i y uvrstimo u jednačinu $8y^2 - x^2 = 36$, dobićemo tražene vrijednosti parametra t.

$$8(-3\cos 2t)^2 - 6^2 = 36$$

$$\cos^2 2t = 1$$

$$\cos 2t = \pm 1$$

I) $\cos 2t = 1$

$$2t = 0 + 2k\pi$$

$$t = k\pi$$

II) $\cos 2t = -1$

$$2t = \pi + 2k\pi$$

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$.

420.

U sistemu jednačina:

$$mx + 6y - 5m + 3 = 0$$

$$2x - (m-7)y + 7m - 29 = 0,$$

odrediti parametar m tako da sistem bude neodređen, tj. da jednačine budu zavisne.

Rješenje. Dati sistem jednačina napišimo u obliku:

$$mx + 6y = 5m - 3$$

$$2x - (m-7)y = 29 - 7m.$$

Uslov zadatka biće ispunjen samo za one vrijednosti parametra m za koje je $D = D_x = D_y = 0$

$$D = \begin{vmatrix} m & 6 \\ 2 & -(m-7) \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 5m-3 & 6 \\ 29-7m & -(m-7) \end{vmatrix} = 0$$

$$m^2 - 7m + 12 = 0 \qquad m^2 - 16m + 39 = 0$$

$$m_1 = 4, \ m_2 = 3 \qquad m_1 = 13, \ m_2 = 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 5m-3 \\ 2 & 29-7m \end{vmatrix} = 0$$

$$7m^2 - 19m - 6 = 0$$

$$m_1 = 3, \ m_2 = -\frac{2}{7}.$$

Dakle, uslov zadatka je ispunjen samo za $m = 3$ jer samo za tu vrijednost parametra m je $D = D_x = D_y = 0$.

421.

Za koje su vrijednosti parametra t jednačine:

$$x\cos t + y\sin t - 1 = 0$$

$$x + y - 2 = 0,$$

protivurječne?

Rješenje. Da bi dati sistem jednačina bio protivurječan, treba da je determinanta sistema $D = 0$, i $D_x^2 + D_y^2 \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos t - \sin t = 0$$

$$\cos t = \sin t$$

$$t = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$$

Provjeri sam da je za dobijena rješenja ispunjen i uslov

$$D_x^2 + D_y^2 \neq 0.$$

422.

U zavisnosti od parametra λ provesti diskusiju rješenja sistema jednačina:

$$\lambda x - 4y = 5$$
$$x + \lambda y = \lambda.$$

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4, \quad D_x = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 9\lambda, \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 5 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5,$$

$$x = \frac{9\lambda}{\lambda^2 + 4}, \quad y = \frac{\lambda^2 - 5}{\lambda^2 + 4}.$$

Rješenja su konačna i određena za sve vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbf{R}$ jer za te vrijednosti λ imenilac rješenja ne može nikada postati nula.

423.

Riješiti sistem jednačina:

$$nx - y = 1$$
$$x + (n-2)y = 1,$$

i diskutovati dobijeno rješenje.

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} n & -1 \\ 1 & n-2 \end{vmatrix} = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & n-2 \end{vmatrix} = n - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = n - 1.$$

$$x = \frac{n-1}{(n-1)^2}, \quad y = \frac{n-1}{(n-1)^2}.$$

1. Za $n \neq 1$ je $D \neq 0$, pa dati sistem ima rješenje, a za jednačine kažemo da su saglasne.

2. Za $n = 1$ je $D = D_x = D_y = 0$, pa dati sistem ima beskonačno mnogo rješenja, a za jednačine kažemo da su zavisne.

Napomena: Kod provođenja diskusije rješenja sistema jednačina u zavisnosti od parametara, potrebno je kod izračunavanja determinanti D, D_x i D_y njihove vrijednosti rastaviti na proste faktore, ako je to moguće. Kod formiranih rješenja $x = \frac{D_x}{D}$ i $y = \frac{D_y}{D}$ ne smije se vršiti skraćivanje istih faktora jer bi se pri tome izgubila neka od rješenja.

424.

U zavisnosti od parametra m diskutovati rješenje sistema jednačina:

$$mx + 4y = 2$$
$$9x + my = 3.$$

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 9 & m \end{vmatrix} = m^2 - 36 = (m-6)(m+6), \quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & m \end{vmatrix} =$$
$$= 2m - 12 = 2(m-6).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3m - 18 = 3(m-6)$$

$$x = \frac{2(m-6)}{(m-6)(m+6)}, \quad y = \frac{3(m-6)}{(m-6)(m+6)}.$$

1. $D = (m-6)(m+6) \neq 0$ za $m \neq 6$ i $m \neq -6$, pa dati sistem ima rješenje, a za jednačine kažemo da su saglasne.

2. Za $m = 6$ je $D = D_x = D_y = 0$, pa dati sistem ima beskonačno mnogo rješenja, a za jednačine kažemo da su zavisne.

3. Za $m = -6$ je $D = 0$, a D_x i D_y su različiti od nule, pa dati sistem nema rješenja, a za jednačine kažemo da su protivurječne.

425.

Diskutovati rješenje sistema jednačina:

$$(m-3)x - 2y = m$$
$$x + my = -2.$$

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} m-3 & -2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & -2 \\ -2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m-2)(m+2),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m-3 & m \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3m + 6 = -3(m-2),$$

$$x = \frac{(m-2)(m+2)}{(m-1)(m-2)}, \quad y = \frac{-3(m-2)}{(m-1)(m+2)}.$$

1. Za $D=(m-1)(m-2)\neq 0$, tj. za $m\neq 1$ i $m\neq 2$ sistem jednačina ima rješenje, a za jednačine kažemo da su saglasne.

2. Za $m=1$ je $D=0$ dok su D_x i D_y različiti od nule, pa sistem nema rješenja, a jednačine su protivurječne.

3. Za $m=2$ je $D=D_x=D_y=0$, pa sistem ima beskonačno mnogo rješenja, a jednačine su zavisne.

426.

Diskutovati rješenje sistema u zavisnosti od parametra a:

$$x\cos a+y\sin a=1$$

$$x\sin a+y\cos a=\sqrt{3}.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}\cos a & \sin a\\ \sin a & \cos a\end{vmatrix}=\cos 2a,\quad D_x=\begin{vmatrix}1 & \sin a\\ \sqrt{3} & \cos a\end{vmatrix}=\cos a-\sqrt{3}\sin a,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\cos a & 1\\ \sin a & \sqrt{3}\end{vmatrix}=\sqrt{3}\cos a-\sin a.$$

1. Za $D=\cos 2a\neq 0$, tj. za $2a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, odnosno za $a\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ sistem ima jednoznačno rješenje, a jednačine su saglasne.

2. Za $d=\cos 2a=0$, tj. za $2a=\frac{\pi}{2}+k\pi$, odnosno za $a=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ je D_x i D_y različiti od nule, pa sistem nema rješenja, a jednačine su protivurječne.

5.5. Rješavanje nehomogenog sistema tri linearne jednačine sa tri nepoznate

Za nehomogeni sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate:

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3\end{aligned}\qquad (4)$$

rješenje dato Kramerovim obrascem glasi:

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D},\quad (D\neq 0)\qquad (5)$$

pri čemu je:

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix},\qquad (6)$$

gdje je D determinanta sistema formirana od koeficijenata uz nepoznate, dok determinante u brojiocima dobijemo iz determinante sistema D zamjenom koeficijenata uz traženu nepoznatu slobodnim članovima d_1, d_2, d_3.

Na isti način, kao i sistem od tri linearne jednačine sa tri nepoznate, rješava se i nehomogen sistem od četiri linearne jednačine sa četiri nepoznate, ili u opštem slučaju, nehomogen sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih, kod kojih je determinanta sistema $D\neq 0$. I u ovom slučaju primjenjuju se Kramerovi obrasci.

Kod rješavanja nehomogenog sistema od tri linearne jednačine sa tri nepoznate mogu se pojaviti sljedeći slučajevi:

1. Kada je determinanta sistema $D\neq 0$, sistem jednačina (4) *ima jedno određeno rješenje* dato Kramerovim obrascima (5) bez obzira na vrijednosti D_x, D_y, D_z. Za jednačine takvog sistema kažemo da su s a g l a s n e.

2. Ako je determinanta sistema $D=0$, a bar jedna od determinanti D_x, D_y, D_z različita od nule, onda sistem jednačina (4) *nema rješenje*, a za jednačine se kaže da su *protivurječne*.

3. Kada je determinanta sistema $D=0$ i $D_x=D_y=D_z=0$, onda mogu nastupiti sljedeći slučajevi:

a) da su sve subdeterminante sistema D (ima ih 9) jednake nuli, onda slijedi da su koeficijenti uz nepoznate proporcionalni pa mogu nastupiti sljedeća dva slučaja:

1) ako su i nezavisni članovi sistema jednačina proporcionalni koeficijentima uz nepoznate, onda je takav sistem *neodređen* i ima beskonačno mnogo rješenja, a jednačine su *zavisne*.

2) ako nezavisni članovi sistema jednačina nisu proporcionalni sa koeficijentima uz nepoznate, onda sistem jednačina *nema rješenje*, a za jednačine kažemo da su *protivurječne*.

b) da je bar jedna od subdeterminanata determinante sistema D različita od nule, onda je sistem jednačina *neodređen* i *ima beskonačno mnogo rješenja*, a za jednačine kažemo da su *zavisne*.

427.

Riješiti sistem jednačina:

$$5x+2y-2z=3$$
$$3x-4y+5z=10$$
$$7x-3y+6z=19.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}5 & 2 & -2\\ 3 & -4 & 5\\ 7 & -3 & 6\end{vmatrix}=-49,\quad D_x=\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\ 10 & -4 & 5\\ 19 & -3 & 6\end{vmatrix}=-49,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}5 & 3 & -2\\ 3 & 10 & 5\\ 7 & 19 & 6\end{vmatrix}=-98$$

$$D_z=\begin{vmatrix}5 & 2 & 3\\ 3 & -4 & 10\\ 7 & -3 & 19\end{vmatrix}=-147$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-49}{-49}=1,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-98}{-49}=2,\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{-147}{-49}=3.$$

Pošto je determinanta sistema $D=-49\neq 0$, to je dati sistem jednačina saglasan, a dobijeno rješenje je jedino.

428.

Riješiti sistem jednačina:

$$x+2y-z=5$$
$$2x-y+4z=17$$
$$2x+4y-2z=3.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 17 & -1 & 4\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-49,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 17 & 4\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=42,\quad D_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 17\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=35.$$

Pošto je $D=0$, a D_x, D_y i D_z različiti od nule, onda je dati sistem jednačina protivurječan i nema rješenja.

429.

Ispitaj prirodu rješenja sistema jednačina:

$$2x+3y-4z=2$$
$$x+y+3z=3$$
$$3x+4y-z=5.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 1 & 1 & 3\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 3 & 1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 2 & -4\\ 1 & 3 & 3\\ 3 & 5 & -1\end{vmatrix}=0,\quad D_z=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=0.$$

Pošto je $D=D_x=D_y=D_z=0$, dok subdeterminante determinante sistema nisu sve jednake nuli, to je promatrani sistem zavisan i ima beskonačno mnogo rješenja.

430.

U zavisnosti od parametra m diskutovati rješenja sistema jednačina:

$$mx+y+z=1$$
$$x+my+z=m$$
$$x+y+mz=m^2.$$

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=(m-1)^2(m+2),\quad D_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m & 1\\ m^2 & 1 & m\end{vmatrix}=$$

$$=-(m-1)^2(m+1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & m^2 & m\end{vmatrix}=(m-1)^2,\quad D_z=\begin{vmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & m\\ 1 & 1 & m^2\end{vmatrix}=(m-1)^2(m+1)^2,$$

$$x=\frac{-(m-1)^2(m+1)}{(m-1)^2(m+2)},\quad y=\frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)},$$

$$z=\frac{(m-1)^2(m+1)^2}{(m-1)^2(m+2)}.$$

1. Ako je $D=(m-1)^2(m+2)\neq 0$, tj. $m\neq 1$ i $m\neq -2$ sistem ima jednoznačno određeno rješenje, a jednačine su saglasne.

2. Za $m=-2$ je $D=0$, dok su D_x, D_y i D_z različiti od nule, pa dati sistem nema rješenja, a jednačine su protivurječne.

Ako je $m=1$, onda je $D=D_x=D_y=D_z=0$, pa je sistem neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja, a jednačine su zavisne.

431.

Riješiti sistem jednačina:

$$(a-1)x+y-z=2a-1$$
$$(2a-5)x+4y-5z=a+2$$
$$(2a-3)x+y+(a-3)z=a+1$$

i dobijeno rješenje diskutovati u zavisnosti od parametra a.

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 2a-5 & 4 & -5 \\ 2a-3 & 1 & a-3 \end{vmatrix}=2a(a-2),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2a-1 & 1 & -1 \\ a+2 & 4 & -5 \\ a+1 & 1 & a-3 \end{vmatrix}=7(a-2)\left(a-\frac{2}{7}\right),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a-1 & 2a-1 & -1 \\ 2a-5 & a+2 & -5 \\ 2a-3 & a+1 & a-3 \end{vmatrix}=-3(a-2)\left(a-\frac{1}{3}\right),$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 2a-1 \\ 2a-5 & 4 & a+2 \\ 2a-3 & 1 & a+1 \end{vmatrix}=-9(a-2)\left(a-\frac{5}{9}\right),$$

$$x=\frac{7(a-2)\left(a-\frac{2}{7}\right)}{2a(a-2)},\quad y=\frac{-3(a-2)\left(a-\frac{1}{3}\right)}{2a(a-2)},$$

$$z=\frac{-9(a-2)\left(a-\frac{5}{9}\right)}{2a(a-2)}.$$

1. Za vrijednost parametra $a\neq 0$ i $a\neq 2$ je $D\neq 0$, pa dati sistem ima jednoznačno rješenje, a jednačine su saglasne.

2. Za vrijednost parametra $a=0$ je $D=0$, a D_x, D_y i D_z su različiti od nule, pa promatrani sistem jednačina nema rješenje jer su mu jednačine protivurječne.

3. Za $a=2$ je $D=D_x=D_y=D_z=0$, a sve subdeterminante determinante sistema nisu jednake nuli, to znači da je dati sistem neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja, a jednačine su zavisne.

432.

Riješiti sistem jednačina:

$$4x+ay-12z=2$$
$$ax+9y-18z=b$$
$$2x+3y-az=1$$

i dobijena rješenja diskutovati u zavisnosti od parametara a i b.

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix} 4 & a & -12 \\ a & 9 & -18 \\ 2 & 3 & -a \end{vmatrix}=(a-6)^2(a+12),\quad D_x=\begin{vmatrix} 2 & a & -12 \\ b & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -a \end{vmatrix}=$$
$$=(a-6)(ab+6b-36),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -12 \\ a & b & -18 \\ 2 & 1 & -a \end{vmatrix}=-2(a-6)(2b-a),$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 4 & a & 2 \\ a & 9 & b \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(a-6)(2b-a).$$

1. Za $D=(a-6)^2\cdot(a+12)\neq 0$, tj. za $a\neq 6$ i $a\neq -12$ sistem ima jedinstveno rješenje, a jednačine su saglasne.

2. Za $a=6$, b proizvoljno, imamo da je $D=D_x=D_y=D_z=0$, pa je sistem neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja, a za jednačine kažemo da su zavisne.

3. Za $a=-12$, b proizvoljno, imamo da je:

$$D=0$$
$$D_x=108(b+6)$$
$$D_y=72(b+6)$$
$$D_z=-36(b+6),$$

pa mogu nastupiti slijedeći slučajevi:

a) Za $a=-12$ i $b\neq -6$ sistem nema rješenja jer jednačine postaju protivurječne.

b) Za $a=-12$ i $b=-6$ je $D=D_x=D_y=D_z=0$, pa dati sistem jednačina je neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja, a jednačine su zavisne.

433.

Riješiti sistem jednačina:

$$ax+y+cz=a$$
$$x+y+z=1$$
$$cx+y+az=a$$

i dobijeno rješenje diskutovati u zavisnosti od parametara a i c.

Rješenje.

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & a \end{vmatrix}=(a-c)(a+c-2),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}=(a-c)(a-1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & a & c \\ 1 & 1 & 1 \\ c & a & a \end{vmatrix}=-(a-c)^2,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & a \end{vmatrix}=(a-c)(a-1),$$

$$x=\frac{(a-c)(a-1)}{(a-c)(a+c-2)},\quad y=\frac{-(a-c)^2}{(a-c)(a+c-2)},\quad z=\frac{(a-c)(a-1)}{(a-c)(a+c-2)}.$$

1. Za $c\neq a$ i $a+c\neq 2$ sistem ima jedno određeno rješenje, a jednačine su saglasne.

2. Za $c=a$, $(a\neq 1)$ sistem se svodi na sistem:

$$ax+y+az=a$$
$$x+y+z=1$$
$$ax+y+az=a$$

tj. na sistem:

$$ax+y+az=a$$
$$x+y+z=1,$$

pa je sistem zavisan i ima beskonačno mnogo rješenja.

3. Za $a+c=2$, $(a\neq 1)$ sistem nema rješenje, a jednačine su protivurječne.

4. Za $c=a$ i $a+c=2$, tj. $a=1$ i $c=1$ sistem se svodi na jednačinu:

$$x+y+z=1,$$

odakle slijedi da je:

$$x=1-y-z,\quad y,\ z-\text{proizvoljni}.$$

5.6. Eliminanta

Skup od n nezavisnih ili neprotivurječnih jednačina sa n nepoznatih daje mogućnost da se te nepoznate odrede.

Ako je dat sistem sa manjim brojem jednačina od broja nepoznatih, tada on ne može da se riješi jednoznačno.

434.

Riješiti sistem jednačina:

$$2x+y-z=7$$
$$x+3y+2z=11.$$

Rješenje. Dati sistem ima jednu jednačinu manje od broja nepoznatih, te se dvije nepoznate mogu izraziti preko treće, tj.:

$$2x+y=7+z$$
$$x+3y=11-2z,$$

pri čemu je:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5,\quad D_x=\begin{vmatrix} 7+z & 1 \\ 11-2z & 3 \end{vmatrix}=5z+10,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7+z \\ 1 & 11-2z \end{vmatrix}=15-5z,$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5z+10}{5}=z+2,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{15-5z}{5}=3-z.$$

Kao što se vidi, rješenje je višeznačno jer za svaku novu vrijednost datu za z, dobijaju se druge vrijednosti za x i y.

Isto tako, u opštem slučaju ne može da se riješi sistem koji sadrži veći broj jednačina od broja nepoznatih. Međutim, nekada u ovom slučaju

može da se desi da sistem ima rješenje. Vrlo jednostavan takav slučaj je sistem u kome ima jedna jednačina više nego što ima nepoznatih. Na primjer, ako je dat sistem od četiri jednačine sa tri nepoznate:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

$$a_4 x + b_4 y + c_4 z = d_4$$

i ako formiramo determinantu od svih koeficijenata i slobodnih članova sistema u obliku:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

onda egzistenciju rješenja daje sljedeća teorema:

Sistem koji ima jednu više jednačinu od broja nepoznatih, imaće rješenje ako je njegova determinanta $D = 0$.

Tako formulirana determinanta zove se *eliminanta*.

435.

Riješiti sistem jednačina:

$$x + y + 5z = -7$$

$$2x + y + z = 2$$

$$x + 3y + z = 5$$

$$2x + 3y - 3z = 14.$$

Rješenje. Da bi dati sistem jednačina imao rješenje, treba da je njegova eliminanta jednaka nuli. Zaista, taj je uslov ispunjen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 14 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 14 \end{vmatrix} +$$

$$+5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 14 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -32 - 34 + 220 - 154 = 0.$$

Sada riješimo sistem sastavljen od prve tri jednačine jer će njegovo rješenje zadovoljavati i četvrtu jednačinu. Međutim, mogli smo uzeti bilo koje tri od četiri date jednačine, dobili bismo isto rješenje jer je uvijek jedna posljedica neke od preostale tri.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 22, \quad D_x = \begin{vmatrix} -7 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 22,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 44, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -44$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = 2, \quad z = \frac{-44}{22} = -2.$$

436.

Riješiti sistem jednačina:

$$x + y - 3z = -1$$

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y - 3z = 1.$$

Rješenje. Dati sistem nema rješenje jer mu je eliminanta različita od nule:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 - 12 + 21 - 0 = 5 \neq 0.$$

437.

Kod prave $Ax + y = 5$ odrediti A tako da ona prolazi kroz presjek pravih $2x - 3y = 1$, $x + 2y = 4$.

Rješenje. Iz uslova zadatka vidimo da date prave moraju proći kroz jednu tačku. U tom slučaju sistem od tri jednačine sa dvije nepoznate mora da ima rješenje. To rješenje će postojati ako je eliminanta tog sistema jednaka nuli, tj.:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ A & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenjem ove determinante dobija se da je $A=2$, pa je jednačina tražene prave $2x+y=5$.

438.

Za koje vrijednosti parametra a sistem:

$$2x-3y=1$$
$$x+y=2$$
$$x-y=a,$$

ima rješenje i naći to rješenje.

Rješenje. Da bi dati sistem od tri jednačine s dvije nepoznate imao rješenje, treba da mu je eliminanta jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0.$$

Iz ovog uslova nalazimo da je $a=\frac{4}{5}$. Da je nađena vrijednost za a tačna, utvrdićemo ako ga uvrstimo u dati sistem jednačina, pa ga riješimo, tj.:

$$2x-3y=1$$
$$x+y=2$$
$$x-y=\frac{4}{5}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5, \quad D_x=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7, \quad D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{7}{5}, \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{3}{5}.$$

5.7. Rješavanje sistema homogenih linearnih jednačina

Sistem u kome su sve jednačine homogene zove se *homogeni sistem*. Sistem od n homogenih linearnih jednačina sa n, nepoznatih može se napisati u obliku:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Ovakav sistem ima uvijek jedno rješenje $x_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, koje se zbog svoje očiglednosti zove *trivijalno rješenje*.

Kod rješavanja ovakvog sistema mogu nastupiti sljedeća dva slučaja:

1. Ako je determinanta sistema (1) različita od nule, onda sistem (1) nema drugih rješenja osim trivijalnog.

2. Ako je, pak, determinanta sistema (1) jednaka nuli, onda sistem (1) ima i drugih rješenja osim trivijalnog.

U slučaju triju homogenih linearnih jednačina sa tri nepoznate:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0,$$

ako je $D=0$ i jedna njena subdeterminanta različita od nule, npr. A_{33} elementa c_3, a pod pretpostavkom da je $z \neq 0$, dobija se poslije diobe sa z:

$$a_1 \frac{x}{z} + b_1 \frac{y}{z} + c_1 = 0$$
$$a_2 \frac{x}{z} + b_2 \frac{y}{z} + c_2 = 0$$
$$a_3 \frac{x}{z} + b_3 \frac{y}{z} + c_3 = 0.$$

Ovaj sistem, pošto je $D=0$, imaće rješenje po nepoznatim $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ te je:

$$\frac{x}{z} = \frac{-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y}{z} = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

odakle je:

$$\frac{x}{A_{31}} = \frac{y}{A_{32}} = \frac{z}{A_{33}}.$$

Ako bi subdeterminante, determinante sistema (1) sve bile jednake nuli, onda bi sistem bio zavisan, te bi se sve tri jednačine svele na jednu.

439.

Riješiti sistem jednačina:

$$x+2y+z=0$$
$$3x-5y+3z=0$$
$$2x+7y-z=0.$$

Rješenje. Pošto je determinanta sistema:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=33\neq 0,$$

to dati sistem ima samo trivijalno rješenje $x=y=z=0$.

440.

Riješiti sistem jednačina:

$$4x+y-2z=0$$
$$x-2y+z=0$$
$$11x-4y-z=0.$$

Rješenje. Pošto je determinanta datog sistema:

$$D=\begin{vmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 11 & -4 & -1\end{vmatrix}=0 \text{ i } A_{33}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-9\neq 0,$$

to sistem ima i netrivijalnih rješenja i ona su:

$$\frac{x}{A_{31}}=\frac{y}{A_{32}}=\frac{z}{A_{33}}.$$

Pošto je:

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-9,$$

to je:

$$\frac{x}{-3}=\frac{y}{-6}=\frac{z}{-9}\ /\cdot(-3)$$

$$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=k,\qquad (k\in\mathbf{R}),$$

to je:

$$x=k$$
$$y=2k$$
$$z=3k.$$

441.

Riješiti sistem jednačina:

$$5x+10y+5z=0$$
$$x+2y+z\ =0$$
$$3x+6y+3z\ =0.$$

Rješenje. Determinanta ovog sistema je:

$$D=\begin{vmatrix}5 & 10 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 3\end{vmatrix}=0.$$

Pošto su sve subdeterminante ove determinante jednake nuli, to je sistem zavisan i svodi se na jednu jednačinu:

$$x+2y+z=0,$$

odakle dobijemo:

$$x=-2y-z,\ y \text{ i } z \text{ proizvoljni.}$$

442.

Odrediti parametar a tako da sistem:

$$ax+y+z=0$$
$$x+ay+z=0$$
$$x+y+az=0$$

ima netrivijalna rješenja i naći ta rješenja.

Rješenje. Da bi dati sistem imao i drugih rješenja osim trivijalnog, treba da je:

$$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=0.$$

$$a^3-3a+2=0$$
$$(a-1)^2(a+2)=0$$
$$a=1,\qquad a=-2.$$

1. Za $a=1$ dobija se sistem koji je zavisan jer se svodi samo na jednu jednačinu:

$$x+y+z=0,$$

odakle dobijamo

$$x=-y-z, \quad y, \ z - \text{proizvoljni}.$$

2. Za $a=-2$ sistem glasi:

$$\begin{aligned} -2x+y+z&=0\\ x-2y+z&=0\\ x+y-2z&=0. \end{aligned}$$

Pošto je njegova determinanta sistema:

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0, \quad \text{i} \quad A_{33}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0,$$

to on ima rješenje:

$$\frac{x}{A_{31}}=\frac{y}{A_{32}}=\frac{z}{A_{33}},$$

gdje je:

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3,$$

tj.

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{3}=\frac{z}{3} \Big/ \cdot 3$$

$$x=y=z=k,$$

odnosno:

$$\begin{aligned} x&=k\\ y&=k\\ z&=k, \quad (k\in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

443.

Za koje vrijednosti parametra a sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 7x+ay+4z&=0\\ 5x+2y+az&=0\\ 2ax-23y+29z&=0 \end{aligned}$$

ima i drugih rješenja osim trivijalnog?

Rješenje. Da bi dati sistem imao rješanja različita od trivijalnog, potrebno je da njegova determinanta sistema bude jednaka nuli:

$$D=\begin{vmatrix} 7 & a & 4 \\ 5 & 2 & a \\ 2a & -23 & 29 \end{vmatrix}=0,$$

odnosno:

$$2a^3-54=0$$

$$a=3.$$

Dakle, za $a=3$ dati sistem jednačina poprima oblik:

$$\begin{aligned} 7x+3y+4z&=0\\ 5x+2y+3z&=0\\ 6x-23y+29z&=0 \end{aligned}$$

i ima i drugih rješenja osim trivijalnog jer je:

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & -23 & 29 \end{vmatrix}=0 \quad \text{i} \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Tražena rješenja su:

$$\frac{x}{A_{31}}=\frac{y}{A_{32}}=\frac{z}{A_{33}},$$

gdje je:

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-1, \quad A_{33}=-1,$$

pa imamo:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1},$$

tako da je

$$x=-y=-z=k,$$

odnosno:

$$x=k, \quad y=-k, \quad z=-k, \quad (k\in \mathbf{R}).$$

444.

Ispitati da li sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 2x-3y+2z-9v&=0\\ x+4y-z+3v&=0\\ 3x-2y-2z-6v&=0\\ 7x+11y+3z-6v&=0 \end{aligned}$$

ima i drugih rješenja osim trivijalnog.

Rješenje. Pošto je determinanta sistema:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -9 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & -6 \\ 7 & 11 & 3 & -6 \end{vmatrix}=180\neq 0,$$

to dati sistem ima samo trivijalno rješenje:

$$x=y=z=v=0.$$

445.

Riješiti sistem jednačina:

$$3x+4y-3z=0$$
$$x+2y+z=0.$$

Rješenje.

Pošto su date dvije jednačine sa tri nepoznate, to ih treba podijeliti sa $z\neq 0$ i riješiti po nepoznatim $\frac{x}{z}$ i $\frac{y}{z}$:

$$3\frac{x}{z}+4\frac{y}{z}=3$$

$$\frac{x}{z}+2\frac{y}{z}=-1,$$

odavde je:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2,\quad D_{\frac{x}{z}}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=10,$$

$$D_{\frac{y}{z}}=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-6$$

$$\frac{x}{z}=\frac{D_{\frac{x}{z}}}{D}=\frac{10}{2}=5,\quad \frac{y}{z}=\frac{D_{\frac{y}{z}}}{D}=\frac{-6}{2}=-3$$

ili

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{-3}=z=k,$$

odnosno:

$$x=5k$$
$$y=-3k$$
$$z=k.$$

446.

Izračunati vrijednost determinanti:

1) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{2} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$,

5) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} \sin\frac{x}{2} & -\sin\frac{x}{2} \\ \cos\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} \end{vmatrix}$, 7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_y x \\ \log_x y & 1 \end{vmatrix}$,

8) $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & x \\ 1 & \sqrt{x} \end{vmatrix}$, 9) $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$,

10) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 12 & -4 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 16 & 9 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}$, 11) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$.

Rješenja: 1) 26, 2) 0, 3) -4, 4) -2, 5) 0, 6) $\sin x$, 7) 0, 8) 0, 9) -3, 10) 88, 11) 0 (Od druge kolone oduzeti prvu.).

447.

Riješiti jednačine:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=0$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix}=0$, 3) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$,

4) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix}=\frac{3}{2}$, 5) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$, 6) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0$,

7) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$, 8) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0.$

Rješenja. 1) $x=12$, 2) $x=2$, 3) $x_1=-1$, $x_2=-4$, 4) $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{3}{2}$, 5) $x_{1,2}=\pm 2i$, 6) $x_1=2$, $x_{2,3}=-2\pm i$,

7) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in\mathbf{Z},$

8) $x=\frac{\pi(2n+1)}{6},\quad n\in\mathbf{Z}.$

448.

Dokazati da su realne vrijednosti a, b, c, realni i korijeni jednačine:

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenje. Potrebno je pokazati da diskriminanta kvadratne jednačine koja se dobije nije negativna.

4. Dokazati da su za realne vrijednosti a, b, c, d realni i korijeni jednačine:

$$\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0.$$

449.

Da li tačke $A(1, 1)$, $B(-2,7)$, $C(0,3)$ leže na jednoj pravoj?

Rješenje. Leže.

450.

Date su tačke $A(1, -1)$, $B(2, 4)$. Na pravcu $y=2x-4$ odrediti tačku C, tako da površina trougla ABC bude jednaka 4.

Rješenje. $C_1(-2, 8)$, $C_2\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

451.

Napisati jednačinu pravca koji prolazi kroz tačke $M_1(0, -2)$, $M_2(-5, 3)$. Da li pravac M_1M_2 prolazi kroz presjek pravaca $x-3y-2=0$, $2x+$ $+5y+7=0$?

Rješenje. $x+y+2=0$, prolazi.

452.

Riješiti nejednačine:

1) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$, 3) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 0$,

4) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

Rješenja. 1) $x>3$, 2) $x>-10$, 3) $x<-3$, 4) $-1<x<7$.

453.

Izračunati vrijednosti determinanti:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$,

4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$,

7) $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$, 8) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$,

9) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$, 10) $\begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ x & x+2y+z & z \\ x & y & x+y+2z \end{vmatrix}$.

Rješenja. 1) 52, 2) 34, 3) 36, 4) 55, 5) 0, 6) $\cos(\alpha+\beta)$, 7) 6, 8) 0, 9) $2(ad-bc)$, 10) $2(x+y+z)^3$.

454.

Naći vrijednost determinanti rješavajući ih po jednoj vrsti ili koloni, a zatim, primjenjujući osobine determinanti dovesti da u jednoj vrsti ili koloni bude što više nula, pa ih onda razviti po tim vrstama ili kolonama.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$,

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & -7 \\ 3 & 10 & 6 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

455.

Ne razvijajući determinante dokazati da je:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

456.

Primjenjujući osobine determinanti, kao i primjenom razvoja determinante po vrsti ili koloni, dokazati identitete:

$$1)\ \begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)],$$

$$2)\ \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3,$$

$$3)\ \begin{vmatrix} a^2+(1-a^2)\cos\varphi & ab(1-\cos\varphi) & ac(1-\cos\varphi) \\ ba(1-\cos\varphi) & b^2+(1-b^2)\cos\varphi & bc(1-\cos\varphi) \\ ca(1-\cos\varphi) & cb(1-\cos\varphi) & c^2+(1-c^2)\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi$$

uz uslov da je $a^2+b^2+c^2=1$.

457.

Ako su α, β, γ uglovi jednog trougla, izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\gamma & \sin 2\beta & \sin\alpha \\ \sin\beta & \sin\alpha & \sin 2\gamma \end{vmatrix}.$$

458.

Pokazati da je determinanta:

$$\begin{vmatrix} a & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

kao i dvije druge, dobijene iz date determinante cikličnim pomjeranjem elemenata $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ jednaka nuli, ako su a, b, c dužine strana trougla i α, β, γ njegovi uglovi koji leže naspram strana a, b, c.

459.

Dokazati da, ako su svi elementi determinante trećeg reda jednaki ± 1, onda je vrijednost determinante jednaka parnom broju.

460.

Naći najveću vrijednost koju može imati determinanta trećeg reda pod uslovom da su njeni svi elementi jednaki ± 1.

461.

Naći najveću vrijednost determinante trećeg reda pod uslovom da su joj elementi $+1$ ili 0.

462.

Riješiti jednačine:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0,\quad 2)\ \begin{vmatrix} x & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad 3)\ \begin{vmatrix} 3 & x & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \end{vmatrix}=0,$$

$$4)\ \begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad 5)\ \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad 6)\ \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$7)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 4 & 2 & x \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0,\quad 8)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0,\quad 9)\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^3 & x^6 \end{vmatrix}=0,$$

$$10)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}=0.$$

Rješenje. 1) $x=-3$, 2) $x=2$, 3) $x=16$, 4) $x_1=1$, $x_2=2$, 5) $x_1=-1$, $x_2=2$, 6) $x_1=-10$, $x_2=2$, 7) $x_1=2{,}5$, $x_2=2$,

8) $x^3-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-2$,

9) $x^4(x-1)^3(x+1)=0$, 10) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$.

16*

463.

Riješiti nejednačine:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0$, 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

Rješenje. 1) $x > \frac{7}{2}$, 2) $-6 < x < -4$.

464.

Riješiti sisteme jednačina:

1) $x+2y=5$, $-3x+4y=5$,
2) $4x+y=5$, $3x-2y=12$,
3) $5x+3y=21$, $2x+7y=20$,
4) $6x+5y=1$, $8x+3y=5$,
5) $9x+2y=8$, $4x+y=3$,
6) $2x+3y=9$, $5x+2y=6$.
7) $2x+y=\frac{1}{5}$, $4x+2y=\frac{1}{3}$,
8) $3x+2y=\frac{1}{6}$, $9x+6y=\frac{1}{2}$,
9) $3x-5y=13$, $2x+7y=81$,
10) $x-y\sqrt{3}=1$, $x\sqrt{3}-3y=\sqrt{3}$,
11) $x\sqrt{5}-5y=\sqrt{5}$, $x-y\sqrt{5}=5$,
12) $(1+a)x-ay=1+a$, $ax+(1-a)y=a-1$,
13) $(a+b)x-(a-b)y=4ab$, $(a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2)$,
14) $ax-by=a^2+b^2$, $bx+ay=a^2+b^2$,
15) $x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos 2\alpha$, $x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha$.

Rješenje. 1) $x=1$, $y=2$, 2) $x=2$, $y=-5$, 3) $x=3$, $y=2$, 4) $x=1$, $y=-1$, 5) $x=2$, $y=-5$, 6) $x=0$, $y=3$.

7) Sistem nema rješenja, a jednačine su protivurječne.

8) Sistem ima beskonačno mnogo rješenja, a jednačine su zavisne.

9) $x=16$, $y=z$.

10) Sistem ima beskonačno mnogo rješenja i jednačine su zavisne.

11) Sistem nema rješenja, a jednačine su protivurječne.

12) $x=1-a$, $y=-(1+a)$,

13) $x=a+b$, $y=a-b$,

14) $x=a+b$, $y=a-b$,

15) $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$.

465.

Odrediti za koje vrijednosti parametra a i b sistem jednačina:

$$3x-ay=1$$
$$6x+4y=b$$

a) ima jedno rješenje,
b) nema rješenje,
c) ima beskonačno mnogo rješenja.

Rješenje. a) $a\neq-2$, b) $a=-2$, $b\neq2$, c) $a=-2$, $b=2$.

466.

Riješiti i diskutovati rješenja sistema jednačina:

1) $ax-9y=6$, $10x-by=10$,
2) $ax+4y=2$, $9x+ay=3$,
3) $mx+6y=5m-3$, $2x-(m-7)y=29-7m$,
4) $(a-2)x+(a^2-4)y=a^2+2a$, $(a-2)x-(a-2)y=3$,
5) $3x+(1+k)y=2k-1$, $2x+(1-k)y=-(2k-1)$,
6) $x\cos\alpha+y\cos\beta=\cos\gamma$, $x\sin\alpha+y\sin\beta=\sin\gamma$.

Rješenja. 1. Rješenja sistema su: $x=\frac{-6(b-15)}{-(ab-90)}$, $y=\frac{10(a-6)}{-(ab-90)}$. Za $ab\neq90$ sistem je određen, za $a=6$ i $b=15$ sistem je neodređen, za $ab=90$ i $a\neq6$, $b\neq15$ sistem je protivurječan.

2) Za $a\neq\pm6$ sistem je određen, za $a=6$ sistem je neodređen, za $a=-6$ sistem je protivurječan.

3) Rješenja sistema su $x=\frac{5(m-3)(m-13)}{(m-3)(m-4)}$, $y=\frac{7(m-3)\left(m+\frac{2}{7}\right)}{(m-3)(m-4)}$. Za $m\neq3$ i $m\neq4$ sistem je određen, za $m=3$ sistem je neodređen, za $m=4$ sistem je protivurječan.

4) Za $a=-3$ sistem je neodređen, za $a=2$ sistem je nemoguć.

5) Rješenja su $x=\frac{-6k}{5k-1}$, $y=\frac{10k+1}{5k-1}$. Za $k=\frac{1}{5}$ sistem je nemoguć, u svim ostalim slučajevima sistem ima određena rješenja.

6) Za $\beta-\alpha\neq k\pi$ sistem je određen, za $\beta-\alpha=k\pi$, $\beta-\gamma\neq k\pi$ i $\gamma-\alpha\neq k\pi$ sistem je protivurječan, za $\alpha=\beta=\gamma+k\pi$ sistem je neodređen.

467.

Riješiti sisteme jednačina:

1) $x+2y+z=8$, $3x+2y+z=10$, $4x+3y-2z=4$,

2) $5x-y-z=0$, $x+2y+3z=14$, $4x+3y+2z=16$,

3) $x+2y+3z=6$, $4x+y+4z=9$, $3x+5y+2z=10$,

4) $x+3y-6z=12$, $3x+2y+5z=-10$, $2x+5y-3z=6$,

5) $2x+y+3z=3$, $4x+2y+5z=5$, $3x+4y+7z=2$,

6) $x+2y+z=4$, $3x-5y+3z=1$, $2x+7y-z=8$,

7) $y+z=3$, $2x+z=0$, $3y+5z=13$,

8) $2x-4y+9z=28$, $7x+3y-6z=-1$, $7x+9y-9z=5$,

9) $2x+y=5$, $x+3z=16$, $5y-z=10$,

10) $7x+2y+3z=15$, $5x-3y+2z=15$, $10x-11y+5z=36$,

11) $x+y+z=a$, $x-y+z=b$, $x+y-z=c$,

12) $x-y+z=a$, $x+y-z=b$, $y+z-x=c$,

13) $x+2y-4z=1$, $2x+y-5z=-1$, $x-y-z=-2$,

14) $2x-y+z=-2$, $x+2y+3z=-1$, $x-3y-2z=3$,

15) $3x-y+2z=5$, $2x-y-z=2$, $4x-2y-2z=-3$,

16) $ax+by+cz=a-b$, $bx+cy+az=b-c$, $cx+ay+bz=c-a$.

Rješenja.

1) $x=1,\ y=2,\ z=3$. 2) $x=1,\ y=2,\ z=3$. 3) $x=1,\ y=1,\ z=1$. 4) $x=0,\ y=0,\ z=-2$. 5) $x=1,\ y=-2,\ z=1$. 6) $x=1,\ y=1,\ z=1$. 7) $x=\frac{2}{7},\ y=\frac{37}{7},\ z=-\frac{4}{7}$. 8) $x=2,\ y=3,\ z=4$. 9) $x=1,\ y=3,\ z=5$. 10) $x=2,\ y=-1,\ z=1$.

11) $x=\frac{b+c}{2},\ y=\frac{a-b}{2},\ z=\frac{a-c}{2}$.

12) $x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{b+c}{2},\ z=\frac{a+c}{2}$.

13) Ima beskonačno mnogo rješenja.
14) Nema rješenja za $a+b+c\neq 0$. 15) Nema rješenja. 16) $x=1,\ y=-1,\ z=0$.

468.

Ispitati rješivost sistema jednačina:

$$(\lambda-1)x+z=0$$
$$(\lambda+1)x-\lambda y-z=-1$$
$$y+\lambda z=1,$$

u zavisnosti od parametra λ.

Rješenje.

$D=-\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$, $D_x=\lambda-1$, $D_y=-\lambda(\lambda-3)$, $D_z=-(\lambda-1)^2$. Prema tome je: 1) za $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq -1$, $\lambda\neq 2$. Sistem ima jedno rješenje. 2) Za $\lambda=0$ je $D=0$, $D_x\neq 0$, pa je sistem protivurječan. 3) Za $\lambda=1$ je $D=0$, $D_x\neq 0$ sistem je protivurječan. 4) Za $\lambda=2$, $D=0$, $D_x\neq 0$ sistem je protivurječan.

469.

Odrediti za koje vrijednosti parametra a i b sistem jednačina:

$$3x-2y+z=b$$
$$5x-8y+9z=3$$
$$2x+y+az=-1$$

1) ima samo jedno rješenje,
2) nema rješenje,
3) ima beskonačno mnogo rješenja.

Rješenje.

1) za $a\neq -3$. 2) Za $a=-3$, $b\neq\frac{1}{3}$. 3) Za $a=-3$, $b=\frac{1}{3}$.

470.

Riješiti sistem jednačina:

$$y+\lambda z=0$$
$$x+2y+\lambda^3 z=0$$
$$2x+3y+\lambda^4 z=\lambda$$

i dobijeno rješenje diskutovati u zavisnosti od parametra λ.

Rješenje.

$$D=-\lambda(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

1) Za $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$ i $\lambda\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ sistem je saglasan.

2) Za $\lambda=0$ sistem je neodređen.

3) Za $\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $D=0$, sistem je protivurječan.

4) Za$=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $D\neq 0$, sistem je protivurječan.

471.

Riješiti sistem jednačina:

1)
$$\begin{aligned} x+2y-z&=3\\ 3x-y+2z&=-1\\ 4x+y+z&=2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+y+z&=4\\ 2x+2y+2z&=6\\ 3x+3y+3z&=8 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=5\\ 4x-6y+2z&=10\\ 6x-9y+3z&=15 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x+4y+z&=4\\ 3x+6y+2z&=4\\ 4x-y-3z&=1, \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} x+y-z&=3\\ x+y+z&=1\\ x+y&=1, \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+y-z&=3\\ x+y+z&=1\\ x+y&=2, \end{aligned}$$

7)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2x+4y+6z&=3\\ 3x+6y+9z&=2, \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} y-z+4t&=-5\\ x-2z+3t&=-4\\ 3x+2y-5t&=12\\ 4x+3y-5z&=5, \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} x-3y+5z-7t&=12\\ 3x-5y+7z-t&=0\\ 5x-7y+z-3t&=4\\ 7x-y+3z-5t&=16. \end{aligned}$$

Rješenje. 1) Sistem je neodređen. 2) Sistem je nemoguć, a jednačine su
protivurječne. 3) Sistem je neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja.
4) $x=-2$, $y=3$, $z=-4$. 5) Sistem nema rješenja. 6) Sistem jednačina
je neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja 7) Sistem nema rješenje, a
jednačine su protivurječne. 8) $x=1$, $y=2$, $z=1$, $t=-1$. 9) $x=1$, $y=1$,
$z=0$, $t=-2$.

472.

Iz sistema jednačina izračunati samo y:

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=14\\ y+2z+3t&=20\\ z+2t+3x&=14\\ t+2x+3y&=12. \end{aligned}$$

Rješenje. $D=96$, $D_y=192$, $y=2$.

473.

Pokazati da je sistem jednačina neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja:

$$\begin{aligned} 3x+2y+4z+6v&=2\\ 2x+3y+6z+9v&=3\\ x+4y+8z+12v&=4\\ 4x+y+2z+3v&=1. \end{aligned}$$

474.

Pokazati da dati sistem jednačina nema rješenja, a da su jednačine protivurječne:

$$\begin{aligned} 3x+2y+4z+6v&=2\\ 2x+3y+6z+9v&=3\\ x+4y+8z+12v&=5\\ 4x+y+2z+3v&=1. \end{aligned}$$

475.

Diskutovati rješenja datih sistema jednačina u zavisnosti od parametra a:

1)
$$\begin{aligned} ax+2y-z&=0\\ 3x+3y-az&=5\\ 5x-y+3z&=5, \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} ax+3y+2z&=a+2\\ (a+1)x+ay-z&=a+4\\ ax+(a+5)y+(a+4)z&=3, \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} (a-1)x+z&=0\\ -(a+1)x+ay+z&=0\\ y+az&=1, \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} x+y+z&=a\\ x+(1+a)y+z&=2a\\ x+y(1+a)z&=0. \end{aligned}$$

476.

Diskutovati sistem jednačina:

$$(a-1)x+2y-6z=1$$
$$(a-2)x+3y-z=b$$
$$x+ay+(a-4)z=-2$$

u zavisnosti od parametara a i b i riješiti ga za slučaj neodređenosti.

477.

Diskutovati sistem jednačina:

$$2x+y-3z=4$$
$$5x-2y+z=b$$
$$4x+7y+az=-8$$

u zavisnosti od parametara a i b i riješiti ga za slučaj neodređenosti.

478.

Ispitati, s obzirom na razne vrijednosti parametra λ, rješenja sistema jednačina:

$$x+y+\lambda z+t=1$$
$$x+2y+t=0$$
$$x+t=\lambda$$
$$\lambda x+z=1.$$

Rješenje. $D=2\lambda^2$, $D_x=3\lambda-2$, $D_y=-\lambda^3$, $D_z=2\lambda-\lambda^2$, $D_t=2\lambda^3-3\lambda+2$.

1) Za $\lambda\neq 0$ sistem ima rješenje.

2) Za $\lambda=0$ je $D=0$, $D_t\neq 0$, pa je sistem protivurječan.

479.

Riješiti sisteme jednačina:

1) $4x+2y+z=13$
$2x+y-2z=-6$,

2) $x-y+z=2$
$x-y-2z=-1$,

3) $x+y+z+u=5$
$x-y+3z-u=3$
$x+5y-3z+5u=\lambda$,

4) $2x+7y+3z+u=6$
$3x+5y+2z+2u=4$
$9x+4y+z+7u=2$.

Rješenje. 1) Ako se formiraju sve determinante drugog reda od koeficijenta uz nepoznate i slobodnih članova, vidi se da su sve one različite od nule, izuzev determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zato, da bismo riješili dati sistem, napišimo ga u obliku $2y+z=13-4x$, $y-2z=-6-2x$, pa je $D=-5$, $D_y=-20+10x$, $D_z=-25$, $y=4-2x$, $z=5$.

2) Postupak isti kao u prethodnom zadatku i dobije se:

$$y=x-1,\quad z=1.$$

3) Za $\lambda\neq 9$ sistem je nemoguć. Za $\lambda=9$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

4) $x=\dfrac{z-9u-2}{11}$, $y=\dfrac{u-5z+10}{11}$.

480.

Riješiti sisteme jednačina:

1) $3x+y=5$,
$6x-y=3$
$2x+5y=8$,

2) $2x+y+z=3$
$x-y+2z=1$
$3x+2y-3z=10$
$x+3y+4z=3$,

3) $x+2y+z=2$
$4x-3y-z=3$
$2x+4y+2z=4$
$3x+y-2z=1$.

Rješenje.

1) Sistem nema rješenja jer mu je eliminanta $D=49\neq 0$.

2) $x=1$, $y=2$, $z=-1$, 3) $x=1$, $y=0$, $z=1$.

481.

Riješiti sisteme homogenih jednačina:

1) $x+y+z=0$
$3x-y+2z=0$
$x-3y=0$,

2) $x-3y+2z=0$
$x-y+z=0$
$2x+y-3z=0$,

3) $x+y+z=0$
$2x-3y+4z=0$
$4x-11y+10z=0$,

4) $x+y-z=0$
$4x+4y-4z=0$
$5x+5y-5z=0$,

5) $x+y+z=0$
$2x-3y+4z=0$
$5x-7y+8z=0$,

6) $x-y-z=0$
$x+4y+2z=0$
$3x+4y+3z=0$,

7) $2x+y-z=0$
$x+2y+z=0$
$3x+4y+3z=0,$

8) $4x+y+z=0$
$x+3y+z=0$
$x+y+2z=0,$

9) $3x+2y-z=0$
$x+2y+9z=0$
$x+2y+2z=0,$

10) $ax+by+(a+b)z=0$
$bx+ay+(a+b)z=0$
$x+y+2z=0$

11) $x+3y+2z+u=0$
$x+4y+5z+u=0$
$2x+y+3z=0$
$x+3y+2z+u=0.$

Rješenje. 1) $\frac{x}{3}=y=\frac{z}{-4}=k,$ 2) $D=-7\neq 0,\ x=y=z=0,$

3) $\frac{x}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-5}=k,$

4) Ne samo što je $D=0$, nego su i svi minori jednaki nuli, pa se sistem svodi na jednu jednačinu čije je rješenje $y=z-x$, x i z proizvoljni,

5) $x=y=z=0,$ 6) $x=2k,\ y=-3k,\ z=5k,$

7) $x=y=z=0,$ 8) $x=y=z=0,$

9) $x=2k,\ y=-28k,\ z=4k,$ 10) $x=k,\ y=k,\ z=-k,$

11) $D=0,\ \frac{x}{k_{41}}=\frac{y}{k_{42}}=\frac{z}{k_{43}}=\frac{u}{k_{44}},\ \frac{x}{0}=\frac{y}{-6}=\frac{z}{2}=\frac{u}{14}.$

482.

Za koje vrijednosti parametra λ sistem homogenih jednačina:

$$3x-y+z=0$$
$$x-y+2z=0$$
$$x+\lambda y+(1+\lambda)z=0,$$

ima i drugih rješenja osim trivijalnog?

Rješenje. $\lambda=2\pm\sqrt{6}$.

483.

Odrediti parametar m tako da sistem jednačina:

$$2x+6y+(m+6)z=0$$
$$-x+7y+5z=0$$
$$mx+5y+13z=0,$$

ima rješenja različita od trivijalnih.

Rješenje. $m=4,\quad m=-\frac{45}{7}.$

484.

Odrediti parametar λ tako da sistem:

$$x+y+z=0$$
$$ax+4y+z=0$$
$$6x+(a+2)y+2z=0,$$

ima rješenja različita od trivijalnih, a zatim naći ta rješenja.

Rješenje. $\lambda=-3,\ x=3k,\ y=-4k,\ z=7k;\ \lambda=4,\ x=-k,\ y=k;\ z=0.$

485.

Riješiti sisteme homogenih jednačina:

1) $2x-3y+4z=0$
$3x+y-2z=0,$

2) $x+2y-3z=0$
$2x+4y-6z=0,$

3) $x+2y-3z=0$
$3x-4y+z=0,$

4) $2x+3y-z=0$
$x-2y+2z=0,$

5) $3x-2y+5z=0$
$x+2y-3z=0,$

6) $3x-2y+z=0$
$6x-4y+3z=0,$

7) $a^2x-2(a^2+b^2)y+b^2z=0$
$2x+2y-3z=0,$

8) $ax+y+z=0$
$x-y+az=0,$

9) $x-3y+az=0$
$bx+6y-z=0,$

10) $ax+2y-z=0$
$2x+by-3z=0.$

Rješenja.

1) $x=2k, \quad y=16k, \quad z=11k.$

2) Sistem se svodi na jednu jednačinu čije je rješenje:

$$y=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}x, \quad x \text{ i } z \text{ proizvoljni.}$$

3) $x=-k, \quad y=-k, \quad z=-k.$

4) $x=4k, \quad y=-5k, \quad z=-7k.$

5) $x=-2k, \quad y=7k, \quad z=4k.$

6) $x=2k, \quad y=3k, \quad z=0.$

7) $x=2k, \quad y=k, \quad z=2k.$

8) $x=(a+1)k, \quad y=(1-a^2)k.$
$z=-(a+1)k$, pod uslovom da bude $a\neq -1$, (ako je $a=-1$, onda bilo koje rješenje sistema sastoji se od tri broja x, y, z, gdje su x i y bilo koji brojevi, a $z=x+y$).

9) $x=3(1-2a)k, \quad y=(ab+1)k, \quad z=3(b+2)k$, pod uslovom da je $a\neq -\frac{1}{2}$ ili $b\neq -2$ $\left(\text{ako je } a=-\frac{1}{2} \text{ i } b=-2, \text{ onda su } x \text{ i } y \text{ proizvoljni a } z=2(3y-x)\right)$.

10) $x=(b-6)k, \quad y=(3a-2)k, \quad z=(ab-4)k$, pod uslovom da je $a\neq\frac{3}{2}$ ili $b\neq 6$, $\left(\text{ako je } a=\frac{2}{3} \text{ i } b=6, \text{ onda su } x \text{ i } y \text{ proizvoljni a } z=\frac{2}{3}x+2y\right)$.

6. MATRICE

6.1. Pojam matrice

U sistemu linearnih jednačina:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2k}x_k+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ik}x_k+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mk}x_k+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array} \quad (1)$$

ili kraće pisano:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=b_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

važnu ulogu igraju koeficijenti a_{ik}. Skup ovih koeficijenata a_{ik} jednačina (1) napisanih u obliku sheme:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1k} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2k} & \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots a_{ik} & \cdots a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mk} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

je *matematički operator* koji se naziva *matrica* i koji nema određenu numeričku vrijednost, već predstavlja određeni način pisanja elemenata nekog skupa.

Koeficijenti a_{ik} $(i=1, 2, \ldots, m; \ k=1, 2, \ldots n)$ zovu se *elementi matrice.*

Elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in}$, $(i=1, 2, \ldots, m)$ čine i-tu *vrstu* matrice.
Elementi $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ čine k-tu *kolonu* matrice.

Za matricu (2) kažemo da ima m vrsta i n kolona, da je *tipa* odnosno *formata* $m\times n$.

Matrica (2) kraće se obilježava sa:

$$A=[a_{ik}] \text{ ili } A=\|a_{ik}\| \text{ ili } A=\{a_{ik}\} \text{ ili } A=(a_{ik}).$$

Kada je $m \neq n$ matrica je *pravougla*. Na primjer, pravougle su sljedeće matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 5}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

Kada je $m=n$ matrica je *kvadratna* reda n.

Kvadratna matrica tipa 3×3 je:

$$C=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

Ako je matrica kvadratna tipa $n\times n$, onda za elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ kažemo da leže na *glavnoj dijagonali*.

Zbir elemenata kvadratne matrice A, koji leže na glavnoj dijagonali, zove se *trag matrice* A, i označava se sa:

$$\text{tr}\, A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{3}$$

Dodamo li matrici kao $(n+1)$ — u kolonu brojeve $b_1, b_2, \ldots, b_m$, dobijamo *proširenu matricu* koeficijenata sistema jednačina (1) tj.:

$$[A \mid b]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & b_i \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Poznavanjem matrice $[A \mid b]$ mi smo u mogućnosti da sistem jednačina (1) odmah napišemo.

6.2. Vektor—matrice

Svaka kolona matrice tipa $m\times n$ je matrica tipa $m\times 1$ i zove se *vektor-kolona* ili *matrica-kolona*.

Vektor-kolone u okviru matričnog računa označavamo malim potcrtanim slovom. Na primjer:

$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Elementi $b_1, b_2, \ldots, b_m$ nazivaju se *komponente vektora*, pa ako ih ima m govorimo o m-komponentnom vektoru.

Svaka vrsta matrice tipa $m\times n$ je matrica tipa $1\times n$ i zove se *vektor-vrsta* ili *matrica-vrsta*.

Vektor-vrstu za razliku od vektor-kolone obilježavamo malim slovom sa viticom iznad njega. Na primjer:

$$\tilde{a}=[a_1, a_2, \ldots a_n].$$

Matrica tipa 1×1 sastoji se samo od jednog elementa. Ona se obilježava sa $[a]$.

6.3. Realne i kompleksne matrice

Kada su u matrici elementi realni brojevi, *matrica je realna*, a ako su joj elementi kompleksni brojevi, *matrica je kompleksna*.

Realne su, na primjer, matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kompleksna je, na primjer, matrica:

$$Q=\begin{bmatrix} 2+i & 3+2i \\ 1-i & 4-i \end{bmatrix}.$$

Dvije kvadratne matrice, čiji su odgovarajući elementi konjugovano-kompleksni brojevi, zovu se *konjugovano kompleksne matrice*.

Na primjer, matrici $Q=\begin{bmatrix} 2+i & 3+2i \\ 1-i & 4-i \end{bmatrix}$ konjugovano kompleksna je matrica $\tilde{Q}=\begin{bmatrix} 2-i & 3-2i \\ 1+i & 4+i \end{bmatrix}$.

6.4. Nula—matrica

Kada su svi elementi matrice jednaki nuli, onda se takva matrica zove *nula-matrica* i obeležava se sa 0.

Primjer: Nula—matrice su:

$$0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0=[0,\ 0,\ 0].$$

6.5. Konstantna i promjenljiva matrica

Kada su elementi a_{ik} matrice A konstantne, matrica se zove *konstantna*.

Na primjer, konstantna matrica je

$$C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Međutim, elementi matrice mogu biti funkcije nekog skalara t, onda je matrica promjenljiva, ili kako se još kaže, da je funkcija promjenljivih elemenata a_{ik}.

Matrica

$$A=\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

je funkcija svojih promjenljivih elemenata.

6.6. Transponovana matrica

Kada se u matrice $A=(a_{ik})$ sve vrste uzmu za kolone u istom poretku, a sve kolone za vrste, također u istom poretku, dobija se *transponovana matrica*.

Transponovana matrica A označava se sa A^T ili A'. Ako je matrica A tipa $m \times n$, onda je njena transponovana matrica A^T formata $n \times m$.

Za matricu

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

njena transponovana matrica je

$$A^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kada je matrica A kvadratna, onda se njena transponovana matrica dobija transponovanjem elemenata preko glavne dijagonale.

Za transponovanu matricu vrijedi relacija:

$$(A^T)^T=A$$

Transponovana matrica vrsta daće matricu kolonu, a transponovana matrica kolona daće matricu vrstu:

$$A=[1,\ 2,\ 3], \quad A^T=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B^T=[1,\ 2,\ -3].$$

6.7. Simetrična i kososimetrična matrica

Kvadratna matrica A je simetrična i označava se sa A_s káda su joj elementi simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu jednaki, tj. $a_{ik}=a_{ki}$.

Simetrična je, na primjer, matrica:

$$A_s=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz definicije, očito, proizilazi da je transponovana mat ica simetrične matrice jednaka polaznoj matrici, tj.

$$(A_s)^T=A_s.$$

Kvadratna matrica je *antisimetrična* ili *kososimetrična*, ili, ***alternirajuća***, ako je jednaka negativnoj transponovanoj matrici, tj.

$$-A^T=A_k.$$

Kod kososimetrične matrice elementi na glavnoj dijagonali su jednaki nuli.

Kososimetrična matrica je, na primjer,

$$A_k=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu svojstva:

$$A_s=A_s^T \text{ i } A_k=-A_k^T$$

može se svaka kvadratna matrica razložiti na dva sabirnika, i to: jednu simetričnu i jednu kososimetričnu matricu istog reda n, tj.

$$A=A_s+A_k.$$

Odavde slijedi da je:

$$A^T=A_s^T+A_k^T=A_s-A_k.$$

Stoga se simetrična i kososimetrična matrica mogu ovako predstaviti:

$$A_s=\frac{1}{2}(A+A^T)$$

$$A_k=\frac{1}{2}(A-A^T).$$

17*

486.

Matricu

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\1&0&4\end{bmatrix}$$

predstaviti kao zbir jedne simetrične i jedne kososimetrične matrice istog reda 3.

Rješenje.

$$A_s=\frac{1}{2}(A+A^T)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\1&0&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&4&1\\2&3&0\\1&2&4\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}6&6&2\\6&6&2\\2&2&8\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}3&3&1\\3&3&1\\1&1&4\end{vmatrix},$$

$$A_k=\frac{1}{2}(A-A^T)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\1&0&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&4&1\\2&3&0\\1&2&4\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}0&-2&0\\2&0&2\\0&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

Provjerimo tvrdnju:

$$A=A_s+A_k=\begin{bmatrix}3&3&1\\3&3&1\\1&1&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\1&0&4\end{bmatrix}=A.$$

6.8. Dijagonalna, skalarna i jedinična matrica

Kvadratna matrica koja ima samo elemente na glavnoj dijagonali $d_{ii}\neq 0$, dok su svi ostali jednaki nuli, zove se *dijagonalna* matrica D.

Na primjer dijagonalna matrica je

$$D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

Dijagonalna matrica je *skalarna*, ako je $d_{11}=d_{22}=\dots=d_{nn}$, tj. ako su joj svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki.

Skalarna matrica je na primjer,

$$S=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}.$$

Skalarna matrica, kod koje su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice, zove se *jedinična matrica* i označava se sa I ili E.

Primjer jedinične matrice n-tog reda glasi:

$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\0&0&&1\end{bmatrix}.$$

Matrične elemente jedinične matrice I n-tog reda označavamo takozvanim Kronekerovim simbolima δ_{ij}, $i,j\in\{1,2,3,\dots\}$ i imamo da je:

$$\delta_{ij}=0 \text{ za } i\neq j \text{ i } \delta_{ij}=1 \text{ za } i=j.$$

Pošto su dijagonalne matrice, skalarne matrice i jedinične matrice jednake svojim transponovanim matricama,

$$D=D^T,\quad S=S^T,\quad I=I^T,$$

to su one simetrične.

6.9. Trouglasta i Jakobijeva matrica

Kvadratna matrica kod koje su svi elementi iznad ili ispod glavne dijagonale jednaki nuli, zove se *trouglasta* matrica.

Kad su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, trouglasta matrica je *desna* ili *gornja* i obilježava se sa T_d.

Primjeri desne ili gornje trouglaste matrice su:

$$T_d=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{bmatrix},\qquad T_d=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}.$$

Obratno, kada su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli, trouglasta matrica je *lijeva* ili *donja* i označava se sa T_l.

Tako, lijeva ili donja trouglasta matrica je

$$T_l=\begin{bmatrix}6&0&0\\2&5&0\\4&1&3\end{bmatrix}.$$

Kada se neka kvadratna matrica svede na trouglastu matricu, onda se kaže da je svedena na *kanonski* ili *normalni* oblik.

Transpozicijom, desna trouglasta matrica postaje lijeva, i obratno, lijeva postaje desna.

Na primjer:

$$T_d=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&2&2\\0&0&4\end{bmatrix},\quad T_d^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\3&2&4\end{bmatrix}=T_I.$$

Jakobijeva ili trodijagonalna matrica je ona matrica koja ima samo elemente na glavnoj dijagonali i na dva reda paralelna glavnoj dijagonali i označava se sa J.

Primjer Jakobijeve matrice:

$$J=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&0&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&0\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}&0\\0&0&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\0&0&0&a_{54}&a_{55}\end{bmatrix}.$$

Dakle, Jakobijeva matrica ima u svakoj vrsti, izuzev prve i posljednje, samo po tri elementa. U prvoj i posljednjoj javljaju se po dva elementa.

Transponovanjem jedne Jakobijeve matrice dobija se druga, ali opet Jakobijeva matrica.

6.10. Jednakost matrica

Dvije matrice su *jednake* onda, i samo onda, kada su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

Drugim riječima, za dvije matrice $A=(a_{ik})$ i $B=(b_{ik})$ kažemo da su jednake i pišemo:

$$A=B, \text{ ako je i samo ako je } a_{ik}=b_{ik} \text{ za sve}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Dvije vektor-matrice jednake su samo u slučaju ako su im odgovarajuće komponente jednake.

Na primjer,

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

ako je, i samo ako je, $a_1=b_1 \quad a_2=b_2 \quad a_3=b_3$.

Jednakost matrica ima sljedeće osobine:

$A=A$ refleksivnost

$A=B \Leftrightarrow B=A$ simetričnost

$(A=B \wedge B=C) \Leftrightarrow A=C$ tranzitivnost

6.11. Sabiranje i oduzimanje matrica

Zbir matrica $A=(a_{ik})$ i $B=(b_{ik})$ tipa $m\times n$ u oznaci $C=A+B$ je matrica $C=(c_{ik})$ istog tipa $m\times n$, čiji su elementi:

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

487.

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}.$$

488.

$$\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-1&5\\-3&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2&3+(-1)&2+5\\-1+(-3)&0+(-1)&1+0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3&2&7\\-4&-1&1\end{bmatrix}.$$

Dvije vektor-matrice se mogu samo onda sabrati ako imaju isti broj komponenata.

489.

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{bmatrix}.$$

490.

$$[x_1,\ x_2,\ x_3]+[y_1,\ y_2,\ y_3]=[x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3].$$

Dakle, sabiranje vektora svodimo na sabiranje odgovarajućih komponenata vektora.

Sabiranje matrica ima osobine:

$A+B=B+A$ komutativnost

$(A+B)+C=A+(B+C)$ asocijativnost,

gdje su A, B, C matrice istog tipa.

Nula-matrica 0 tipa $m\times n$ je jedina matrica koja za svaku matricu A tipa $m\times n$ ima osobinu $A+0=A$. Dakle, nula-matrica je neutralni element za sabiranje matrica.

Trag zbira dvije matrice jednak je zbiru tragova pojedinih matrica, tj.

$$\text{tr }(A+B)=\text{tr }A+\text{tr }B.$$

Svakoj matrici $A=(a_{ik})$ tipa $m\times n$ odgovara jedinstvena *suprotna matrica* $-A=(-a_{ik})$ tipa $m\times n$ koja ima osobinu $A+(-A)=0$.

Ako je $a=[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$ vektor, onda je njemu suprotan vektor $-a=[-a_1,\ -a_2,\ \ldots,\ -a_n]$.

Razlika matrica $A=(a_{ik})$ i $B=(b_{ik})$ tipa $m\times n$, u oznaci $C=A-B$ je matrica $C=(c_{ik})$ istog tipa $m\times n$, čiji su elementi: $c_{ik}=a_{ik}-b_{ik}$, $(i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n)$.

491.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-3 & 4-2 & 3-1 \\ -2-5 & 0-3 & 5-(-2) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -7 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dvije vektor-matrice se mogu oduzeti samo ako imaju isti broj komponenata. Dakle, oduzimanje vektor-matrica svodimo na oduzimanje odgovarajućih komponenata vektora.

492.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ x_3-y_3 \end{bmatrix}.$$

Transponovana matrica zbira (razlike) dvije realne ili kompleksne matrice jednaka je zbiru (razlici) transponovanih matrica sabiraka, tj.:

$$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T.$$

6.12. **Proizvod skalara i matrice**

Proizvod skalara λ s matricom $A=(a_{ik})$ tipa $m\times n$ je matrica

$$\lambda\boldsymbol{A}=A\lambda=(\lambda a_{ik}).$$

Drugim riječima, matrica se množi brojem kada se svi njeni elementi pomnože tim brojem, tj.:

$$\lambda\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{bmatrix}.$$

Obratno slijedi: zajednički činilac svih elemenata matrice može se staviti ispred matrice.

Za $\lambda=0$, dobija se nula matrica, za $\lambda=1$, dobija se sama matrica A, a za $\lambda=-1$ dobija se suprotna matrica $-A$.

Kod skalarne matrice može se skalar izvući ispred matrice, pa se dobije proizvod tog skalara i jednačine matrice:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\lambda\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\lambda I.$$

Matricu — vrstu $\tilde{a}=[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ množimo nekim brojem tako da pomnožimo brojem λ svaku komponentu matrice-vrste, tj.:

$$\lambda\cdot\tilde{a}=\lambda\cdot[a_1, a_2, \ldots, a_n]=[\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n].$$

Isto pravilo vrijedi i za matricu-kolonu:

$$\lambda\cdot\underline{b}=\lambda\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}.$$

493.

Ako su dati vektori:

$$\underline{u}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \underline{v}=\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \underline{w}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onda izračunaj:

1) $3\,\underline{u}$,

2) $-\underline{v}$,

3) $3\,\underline{u}-2\,\underline{v}+4\,\underline{w}$.

Rješenje.

1. $$3\,\underline{u}=3\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. $$-\underline{v}=-1\cdot\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. $$3\,\underline{u}-2\,\underline{v}+4\,\underline{w}=3\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -10 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9-(10)+4 \\ 3-\ 12\ +4 \\ 6-\ 0\ +4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 23 \\ -\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

494.

Naći a_1, a_2, i a_3, ako je:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Saberemo li matrice na lijevoj strani, dobijamo:

$$\begin{bmatrix} a_1+2 \\ a_2+3 \\ a_3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti matrica dobija se:

$$\left.\begin{aligned} a_1+2 &= 7 \\ a_2+3 &= 8 \\ a_3-1 &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 5 \\ a_3 &= -2. \end{aligned}$$

Operacija množenja matrica brojem ima osobine:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$$

$$(\alpha A)^T=\alpha A^T,$$

gdje su α, $\beta \in \mathbf{C}$ (**C** polje kompleksnih brojeva) i A, B matrice istog tipa.

Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrice tipa $m\times n$ nad poljem realnih brojeva K i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$ tada matricu:

$$A=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\cdots+\lambda_k A_k=\sum_{r=1}^{k}\lambda_r A_r \tag{1}$$

nazivamo *linearnom homogenom kombinacijom matrica* $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Matrica A je takođe tipa $m\times n$.

Linearna kombinacija (1) je *netrivijalna*, ako je bar jedan od koeficijenata $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ različit od nule.

495.

Riješi matričnu jednačinu:

$$4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Rješenje.

Izvršimo li naznačeno množenje na lijevoj strani brojeva 4 i 3, dobićemo:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} \\ 3x_{21} & 3x_{22} \\ 3x_{31} & 3x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sabiranjem matrica na lijevoj strani dobija se:

$$\begin{bmatrix} 8+3x_{11} & 4+3x_{12} \\ 0+3x_{21} & 4+3x_{22} \\ 4+3x_{31} & 0+3x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti matrica imamo da je:

$$\left.\begin{aligned} 8+3x_{11} &= 5 \\ 3x_{21} &= -1 \\ 4+3x_{31} &= 0 \\ 4+3x_{12} &= 3 \\ 4+3x_{22} &= 3 \\ 3x_{32} &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{11} &= -1 \\ x_{12} & \;\; -\frac{1}{3} \\ x_{21} &= -\frac{1}{3} \\ x_{22} &= -\frac{1}{3} \\ x_{31} &= -\frac{4}{3} \\ x_{32} &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

6.13. Proizvod matrica

Proizvod AB matrica A i B izvodljiv je samo pod uslovom ako je broj kolona prve matrice A, jednak broju vrsta matrice B.

Broj vrsta matrice AB, jednak je broju vrsta matrice A, a broj kolona od AB isti je kao i broj kolona matrice B.

Dakle, ako je A matrica tipa $m\times n$ i B matrica tipa $n\times p$, onda proizvod matrica A i B je matrica $C=AB$ tipa $m\times p$, čiji su elementi:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk},\ (i=1,\ 2,\ \ldots\ m;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Praktično je da se zapamti, da se na primjer elemenat c_{11} matrice $C=AB$ formira na taj način što se elementi prve vrste $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ matrice A pomnoži sa elementima prve kolone:

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

matrice B i tako dobijeni proizvodi saberu, tj.

$$c_{11}=a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}+\cdots+a_{1n}\,b_{n1}.$$

U opštem slučaju, element c_{ik} formira se na taj način što se elementi i-te vrste $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ matrice A, izmnože sa odgovarajućim elementima k-te kolone:

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

matrice B i tako dobijeni proizvodi saberu, tj.

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, p).$$

496.

Naći proizvod $C = AB$ ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+4\cdot4 & 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5 \\ 2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4 & 2\cdot2+3\cdot3+4\cdot4+5\cdot5 \\ 3\cdot1+4\cdot2+5\cdot3+6\cdot4 & 3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 40 \\ 40 & 54 \\ 50 & 68 \end{bmatrix}.$$

Tačnost pravilnog sprovođenja množenja dviju matrica može se provjeriti na tri načina. Te načine pokazaćemo na primjeru.

I način. Ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

tada je:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 27 & 20 \\ 17 & 40 \end{bmatrix}.$$

Za provjeru dobivenog rezultata sastavimo dvije matrice-kolone D i F. U prvoj matrici D elementi su sume elemenata u odgovarajućim vrstama matrice B, tj.

$$D = \begin{bmatrix} 1+ & 2 \\ 3+(-1) \\ 4+ & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix},$$

a u drugoj matrici, F elementi su jednaki sumi elemenata u odgovarajućim vrstama matrice C, tj.:

$$F = \begin{bmatrix} 27+20 \\ 17+40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix}.$$

Proizvod matrice A i D treba da je jednak matrici F, tj.:

$$AD = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix} = F.$$

II način. Sastavimo dvije matrice-vrste G i H; u prvoj matrici G elementi su sume elemenata u odgovarajućim kolonama matrice A, tj.:

$$G = [7+6,\ 4-3,\ 2+5] = [13,\ 1,\ 7],$$

a u drugoj matrici H elementi su sume elemenata u odgovarajućim kolonama matrice C, tj.:

$$H = [27+17,\ \ 20+40] = [44,\ \ 60].$$

Proizvod matrice G i B treba da je jednak matrici H, tj.:

$$GB = [13,\ 1,\ 7] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = [44,\ 60] = H.$$

III način. Sastavimo matricu-vrstu G, čiji su elementi sume elemenata odgovarajućih kolona matrice A, tj.:

$$G = [13,\ 1\ \ 7].$$

Zatim, sastavimo matricu kolonu D, čiji su elementi sume elemenata u odgovarajućim vrstama matrice B, tj.:

$$D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Proizvod GD mora biti jednak sumi svih elemenata matrice C, tj.:

$$GD = [13,\ 1,\ 7] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} = 104 = 27 + 17 + 20 + 40.$$

497.

Dokazati da za matricu:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

vrijedi relacija: $A(t) \cdot A(r) = A(t+r),\ r,\ t \in \mathbf{R}$.

Dokaz

$$A(t)\cdot A(r)=\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos r & -\sin r\\ \sin r & \cos r\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos t\ \cos r-\sin t\ \sin r & -\sin t\ \cos r-\cos t\ \sin r\\ \sin t\ \cos r+\cos t\ \sin r & \cos t\ \cos r-\sin t\ \sin r\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(t+r) & -\sin(t+r)\\ \sin(t+r) & \cos(t+r)\end{bmatrix}=A(t+r).$$

498.

Riješiti matričnu jednačinu:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Tražena matrica X mora biti kvadratna drugog reda, jer matrice $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ i X moraju biti saglasne za množenje, a prema zahtjevu zadatka rezultat mora biti matrica tipa 2×2. Stoga neka je:

$$X=\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix},$$

pa se matrična jednačina može napisati u obliku:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x+2z & y+2u\\ 3x+4z & 3y+4u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti dviju matrica elementi tražene matrice X moraju zadovoljavati sistem jednačina:

$$\left.\begin{aligned}x+2z&=3\\ y+2u&=5\\ 3x+4z&=5\\ 3y+4u&=9\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x&=-1\\ y&=-1\\ z&=\ \ 2,\\ u&=\ \ 3\end{aligned}\qquad \text{tj. } X=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}.$$

499.

Date su kvadratne matrice $A=(a_{ik})$ i $B=(b_{ik})$ reda $n\geqslant 2$, gdje je $a_{ik}=1\ (i\neq k)$, $a_{ii}=0$, $b_{ik}=a_{ik}-\dfrac{n-2}{n-1}$. Pokazati da je: $AB=I$.

Rješenje.

Rješenje ćemo dati za $n=3$.

$$\left.\begin{aligned}a_{11}&=0, & a_{12}&=1, & a_{13}&=1\\ a_{21}&=1, & a_{22}&=0, & a_{23}&=1\\ a_{31}&=1, & a_{32}&=1, & a_{33}&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Iz jednakosti:

$$b_{11}=a_{11}-\frac{n-2}{n-1}=-\frac{1}{2},\quad b_{12}=a_{12}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{2},\quad b_{13}=a_{13}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{2},$$

$$b_{21}=a_{21}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{2},\quad b_{22}=a_{22}-\frac{n-2}{n-1}=-\frac{1}{2},\quad b_{23}=a_{23}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{2},$$

$$b_{31}=a_{31}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{2},\quad b_{32}=a_{32}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{2},\quad b_{33}=a_{33}-\frac{n-2}{n-1}=-\frac{1}{2},$$

slijedi:

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Prema tome je:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I.$$

500.

Ako su date matrice

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\ \text{i}\ B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

izračunaj AB i BA.

Rješenje.

$$AB=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-1+2 & 15+2+2\\ 0+1+1 & 0-2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 19\\ 2 & -1\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+0 & 1-5 & 2+5\\ -3+0 & -1-2 & -2+2\\ 3+0 & 1-1 & 2+1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -4 & 7\\ -3 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Kao što vidimo, matrice AB i BA su različitih tipova, pa nisu jednake. To pokazuje da množenje matrica nije komutativno.

Ako je $AB=BA$, kažemo da su matrice A i B *komutativne*. Odavde proizilazi da, ako su matrice A i B komutativne, moraju biti kvadratne i istog tipa.

501.

Naći sve matrice komutativne sa matricom:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Matrica X koja je komutativna sa datom matricom A mora biti kvadratna drugog reda i zadovoljavati jednačinu:

$$AX=XA,$$

tj.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_{11}+2x_{21} & x_{12}+2x_{22}\\ 3x_{11}+4x_{21} & 3x_{12}+4x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}+3x_{12} & 2x_{11}+4x_{12}\\ x_{21}+3x_{22} & 2x_{21}+4x_{22}\end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti dvije matrice, imamo da je:

$$\begin{aligned}x_{11}+2x_{21}&=x_{11}+3x_{12}\\ x_{12}+2x_{22}&=2x_{11}+4x_{12}\\ 3x_{11}+4x_{21}&=x_{21}+3x_{22}\\ 3x_{12}+4x_{22}&=2x_{21}+4x_{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x_{21}-3x_{12}&=0\\ 2x_{11}+3x_{12}-2x_{22}&=0\\ x_{11}+x_{21}-x_{22}&=0\\ 2x_{21}-3x_{12}&=0.\end{aligned}$$

U ovom sistemu homogenih linearnih jednačina samo dvije jednačine su linearno nezavisne, što nije teško utvrditi, te stoga, ako se izabere da su $x_{11}=a$, $x_{12}=2b$, dobićemo da je $x_{21}=3b$, $x_{22}=a+3b$, pa će tražena matrica glasiti:

$$X=\begin{bmatrix}a & 2b\\ 3b & a+3b\end{bmatrix},$$

gdje su a i b proizvoljni brojevi.

Prethodno rješenje može uvijek da se napiše i drugačije. Naime, biće:

$$\begin{bmatrix}a & 2b\\ 3b & a+3b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a-b)+b & 2b\\ 3b & (a-b)+4b\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}b & 2b\\ 3b & 4b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a-b & 0\\ 0 & a-b\end{bmatrix}.$$

Prema tome, matrica X se može pisati u obliku:

$$X=b\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+(a-b)\cdot I_2.$$

Kako je:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

data matrica A, dok su a i $a-b$ proizvoljni brojevi, to se matrica X komutativna sa kvadratnom matricom A drugog reda, može napisati u obliku:

$$X=\lambda A+\mu I_2,$$

gdje su λ i μ proizvoljni brojevi.

Za transponovane matrice vrijede relacije:

$$(AB)^T=B^T\cdot A^T$$

$$(A_1\cdot A_2,\ \ldots,\ A_{k-1}\cdot A_k)^T=A_k^T\cdot A_{k-1}^T,\ \ldots,\ A_2^T\cdot A_1^T.$$

Množenje matrica je *asocijativno*, tj. ako su A, B, C tri matrice po redu tipa $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$, onda je:

$$(AB)\,C=A\,(BC).$$

Množenje matrica je *distributivno* prema sabiranju s lijeva i s desna, tj. ako su A, B, C, D matrice po redu tipa $m\times n$, $m\times n$, $p\times m$, $n\times q$, tada je:

$$C(A+B)=CA+CB \text{ (distributivnost slijeva)}$$

$$(A+B)\,D=AD+BD \text{ (distributivnost zdesna).}$$

Trag proizvoda dvije matrice nezavisan je od poretka činilaca, tj.

$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA).$$

Vrijedi i jednakost:

$$\alpha(AD)=(\alpha A)D=A(\alpha D), \text{ za } \alpha\in \mathbf{C}$$

($\mathbf{C}$ skup kompleksnih brojeva).

Ako je A matrica tipa $m\times n$, I_m jedinična matrica m-tog reda i I_n jedinična matrica n-tog reda, onda je:

$$I_m\cdot A=A$$

$$A\cdot I_n=A.$$

Ako je A matrica tipa $m\times n$, 0 nula-matrica tipa $p\times m$, onda je:

$$0\cdot A=0, \text{ nula-matrica tipa } p\times n.$$

Ako je pak, 0 nula-matrica tipa $n\times q$, onda je:

$$A\cdot 0=0, \text{ nula-matrica tipa } m\times q.$$

Ukratko proizvod matrice A s nula-matricom (ako je on definisan) je nula-matrica.

Može se desiti da je proizvod dvije kvadratne matrice nula-matrica, iako matrice činioci nisu nula-matrice. Takve matrice zovu se *divizori* (djelioci) od nule. Obje matrice su singularne jer su im determinante jednake nuli.

502.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{matrix}\det A=0,\\ \det B=0.\end{matrix}$$

Proizvod kvadratne matrice n-tog reda sa dijagonalnom matricom istog reda, zavisi od toga da li je ,,proizvod slijeva" ili ,,proizvod zdesna", jer su rezultati različiti, tj.

$$DA\neq AD.$$

U prvom slučaju elementima d_{ii} množe se vrste, a u drugom kolone.

503.

$$D\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6 & 4\\ 1 & 5 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix},$$

$$A\cdot D=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 3 & -2\\ 2 & 5 & -7\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Kada se matrica tipa $m\times n$ pomnoži matricom tipa $n\times 1$, dobija se matrica kolona tipa $m\times 1$.

504.

$$\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 0\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+6+6\\ 1+10+0\\ 4-4+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\ 11\\ 9\end{bmatrix}$$

Proizvod matrice vrste tipa $1\times n$ i matrice tipa $n\times p$, daje za rezultat matricu vrstu tipa $1\times p$.

505.

$$[1,\ 2,\ 3]\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 0\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}=[4+2+12,\ 3+10-6,\ 2+0+9]=[18,\ 7,\ 11].$$

Proizvod matrice vrste tipa $1\times n$ i matrice kolone tipa $n\times 1$ daje 1×1 matricu.

506.

$$[1,\ 2,\ 4]\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}=[3-2+8]=[9].$$

507.

Ako je $\tilde{a}=[x,\ y]$ matrica-vrsta i ako su date matrice kolone:

$$\underline{b}=\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix},\quad \underline{c}=\begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix},$$

odrediti x i y, ako je $\tilde{a}\underline{b}=x$, $\tilde{a}\,\underline{c}=y$.

Rješenje.

$$[x,\ y]\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}=x,\qquad [x,\ y]\begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix}=y.$$

Odavde se dobija sistem jednačina:

$$\begin{matrix}3x+5y=x\\ 6x+8y=y\end{matrix}\quad \text{ili}\quad \begin{matrix}2x+5y=0\\ 6x+7y=0.\end{matrix}$$

Pošto je determinanta dobijenog homogenog sistema jednačina $D=0$, dodati sistem jednačina ima samo trivijalno rješenje $x=y=0$.

Napomena: Treba upamtiti da se kod množenja vektora uvijek prvo piše vektor vrsta, pa tek onda vektor kolona, pošto nam je u našem daljem radu sa matricama jedino ovaj način množenja potreban.

Međutim, proizvod matrice kolone tipa $m \times 1$ i matrice vrste tipa $1 \times n$, daje za rezultat matricu tipa $m \times n$, kod koje su elementi bilo koje kolone proporcionalni odgovarajućim elementima druge neke njene kolone. Ovaj proizvod se zove *dijadadski*.

508.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [1,\ 2,\ 4] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

509.

Za matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

naći komponentu njihovog proizvoda AB, koja se nalazi u drugoj vrsti i trećoj koloni.

Rješenje.

$$C_{23} = [-1,\ 2,\ 0,\ -3] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [-1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2] = -7.$$

6.14. Potencija kvadratne matrice

Ako je A kvadratna matrica reda n onda je:

$$A^0 = I_n$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A \cdot A^2$$
$$\vdots$$
$$A^{p+1} = A \cdot A^p,$$

gdje je p prirodan broj. Kao što se vidi, skraćenog pravila za stepenovanje matrica nema.

Za potencije matrica vrijede jednakosti.

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q}$$
$$(A^p)^q = A^{pq}$$
$$I^p = I$$
$$D^p = (d_{ii}^p),$$

gdje su p i q nenegativni cijeli brojevi.

510.

Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ naći } A^2,\ A^3,\ A^4 \text{ i } A^6.$$

Rješenje.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 31 \\ 93 & 94 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157 & 156 \\ 468 & 469 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = (A^3)^2 = \begin{bmatrix} 32 & 31 \\ 93 & 94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 & 31 \\ 93 & 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3907 & 3906 \\ 11718 & 11719 \end{bmatrix}.$$

511.

Ako je data matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dokazati da je:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pri čemu je } n \in \mathbf{N}.$$

Rješenje.

Tvrdnja je tačna za $n = 2$ jer je:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \binom{2}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokazaćemo da, ako stav vrijedi za neki proizvoljni prirodni broj n, da će onda on da vrijedi i za $n+1$ i time ćemo izvesti dokaz matematičkom indukcijom.

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{bmatrix}1 & n & \binom{n}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1+n & n+\binom{n}{2}\\ 0 & 1 & 1+n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Kako je: $n+\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$, dobijamo najzad da je:

$$A^{n+1}=\begin{bmatrix}1 & n+1 & \binom{n+1}{2}\\ 0 & 1 & n+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

čime je tvrdnja dokazana.

512.

Ako je: $\varphi(\lambda)=-2-5\lambda+3\lambda^2$ i $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, pokazati da je:

$$\varphi(A)=\begin{bmatrix}14 & 2\\ 3 & 14\end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\varphi(A)=-2E-5A+3A^2=-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}^2=$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -10\\ -15 & -5\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}7 & 4\\ 6 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-5 & 0-10\\ 0-15 & -2-5\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}21 & 12\\ 18 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -10\\ -15 & -7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}21 & 12\\ 18 & 21\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-7+21 & -10+12\\ -15+18 & -7+21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 2\\ 3 & 14\end{bmatrix}.$$

513.

Izračunati $\varphi(A)=A^4-A^2+2A-3I$, ako je:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\varphi(A)=A^4-A^2+2A-3I=\begin{bmatrix}3 & 6 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 0\end{bmatrix}^4-\begin{bmatrix}3 & 6 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 0\end{bmatrix}^2+$$

$$+2\begin{bmatrix}3 & 6 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 1 & 0\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\dots=\begin{bmatrix}292 & 455 & 278 & 66\\ 66 & 94 & 59 & 14\\ 14 & 24 & 10 & 3\\ 3 & 5 & 6 & -2\end{bmatrix}.$$

514.

Ako je n prirodan broj i $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, dokazati da je:

$$A^n=I+n(A-I).$$

Rješenje.

Izračunajmo A^n i ono glasi:

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\cdots$$

$$A^n=A\cdot A^{n-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ n-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{bmatrix}.$$

Sada dokažimo da je $A^n=I+n(A-I)$, tj.:

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ n & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+n\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+$$

$$+n\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=I+n(A-I).$$

515.

Ako je $A=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}$, odrediti A^n $(n\in\mathbf{N})$.

Rješenje.

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2 & ab+bc\\ 0 & c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^2 & b(a+c)\\ 0 & c^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a^2 & b(a+c)\\ 0 & c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^3 & b(a^2+ac+c^2)\\ 0 & c^3\end{bmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a^3 & b(a^2+ac+c^2)\\ 0 & c^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^4 & b(a^3+a^2c+ac^2+c^3)\\ 0 & c^4\end{bmatrix}$$

i najzad dobijamo da je:

$$A^n=A\cdot A^{n-1}=\begin{bmatrix} a^n & b(a^{n-1}+a^{n-2}\quad c+\cdots+ac^{n-2}+c^{n-1})\\ 0 & c^n\end{bmatrix}.$$

516.

Ako je $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, pokazati da je $A^p=2^{p-1}A$.

Rješenje.

Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom, tj.

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=2A$$

$$A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2\cdot A^2=2\cdot 2A=2^2A$$

$$A^4=A^3\cdot A=2^2A\cdot A=2^2A^2=2^2\cdot 2A=2^3A.$$

Ako pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za p, onda dokažimo da ona vrijedi i za $p+1$, tj.:

$$A^{p+1}=A^p\cdot A=2^{p-1}A\cdot A=2^{p-1}A^2=2^{p-1}\cdot 2A=2^pA.$$

Ovim je zadatak riješen.

517.

Ako je $T=\begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x\\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x\end{bmatrix}$, pokazati da je:

$$T^2=\begin{bmatrix} \operatorname{ch} 2x & \operatorname{sh} 2x\\ \operatorname{sh} 2x & \operatorname{ch} 2x\end{bmatrix}.$$

Uputa: $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\qquad \operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

Odavde se izvodi da je:

$$\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=\operatorname{ch} 2x$$

$$2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x=\operatorname{sh} 2x.$$

518.

Dokazati da je:

$$\begin{bmatrix} 7 & 4\\ -9 & -5\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 1+6n & 4n\\ -9n & 1-6n\end{bmatrix},\quad (n\in \mathbf{Z}).$$

519.

Naći sva rješenja jednačine:

$$X^2+\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix} -7 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0. \qquad (1)$$

Rješenje.

Tražena matrica X mora biti kvadratna i drugog reda tj.

$$X=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Ako matričnu jednačinu (1) napišemo u obliku kvadrata zbira dvije matrice, imamo:

$$\left\{X+\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\}^2-X\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix} -7 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0,$$

biće

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\}^2-\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix} -7 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} a+1 & b+1\\ c-1 & d+1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} a-b & a+b\\ c-d & c+d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (a+1)^2+(b+1)(c-1) & (a+1)(b+1)+(b+1)(d+1)\\ (a+1)(c-1)+(c-1)(d+1) & (c-1)(b+1)+(d+1)^2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a-b+7 & a+b+1\\ c-d-2 & c+d\end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata jednakih matrica dobićemo četiri jednačine sa četiri nepoznate:

$$a(a+1)+c(b+1)=\quad 7 \quad \text{(I)}$$

$$b(a+1)+d(b+1)=-1 \quad \text{(II)}$$

$$a(c-1)+c(d+1)=0 \quad \text{(III)}$$

$$b(c-1)+d(d+1)=0 \quad \text{(IV)}.$$

Iz (III) i (IV) dobija se:

$$a(c-1)=-c(d+1)$$

$$b(c-1)=-d(d+1),$$

tj. poslije diobe:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k,$$

odakle je:

$$\left.\begin{aligned} a&=kb\\ c&=kd. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Zamjenjujući u (I) i (II) vrijednosti za a i c iz (3) dobija se:

$$\left.\begin{aligned} kb(kb+1)+kd(b+1)&=7\\ b(kb+1)+d(b+1)&=-1/\cdot(-k) \end{aligned}\right\}+$$

$$k=-7.$$

Prema tome, relacije (3) glase:

$$\left.\begin{aligned} a&=-7b\\ c&=-7d. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Relacije (4) i jednakost (III) daju:

$$-7b(-7b-1)-7d(d+1)=0/:7$$

$$b(7b+1)-d(d+1)=0$$

$$b=\frac{d(d+1)}{7d+1}. \quad (5)$$

Međutim, relacije (4) i (II) daju:

$$b(-7b+1)+d(b+1)=-1$$

$$-7b^2+b+d(b+1)+1=0$$

$$-7b^2+d(b+1)+(b+1)=0$$

$$-7b^2+(b+1)\cdot(d+1)=0.$$

Smjenjivanjem (5) u dobijenu relaciju dobićemo:

$$-7\cdot\frac{d^2(d+1)^2}{(7d+1)^2}+\left(\frac{d(d+1)}{7d+1}+1\right)(d+1)=0/\cdot(7d+1)^2$$

$$-7d^2(d+1)^2+[(7d+1)(d^2+d)+(7d+1)^2](d+1)=0$$

$$(d+1)[-7d^2(d+1)+7d^3+7d^2+d^2+d+49d^2+14d+1]=0$$

$$(d+1)(50d^2+15d+1)=0.$$

Iz prvog faktora dobijamo da je:

$$d_1=-1,$$

dok drugi faktor poprima oblik:

$$50d^2+15d+1=0$$

$$d_2=-\frac{1}{5}, \quad d_3=-\frac{1}{10}.$$

Smijenimo li redom d_1, d_2 i d_3 u (5) dobićemo:

$$b_1=0, \quad b_2=\frac{2}{5}, \quad b_3=-\frac{3}{10}.$$

Daljom zamjenom b_1, b_2 i b_3 u relaciju $a=-7b$ iz (4) dobijamo:

$$a_1=0, \quad a_2=-\frac{14}{5}, \quad a_3=\frac{21}{10}.$$

Smjenom d_1, d_2 i d_3 u relaciji $c=-7d$ iz (4) dobijamo:

$$c_1=7, \quad c_2=\frac{7}{5}, \quad c_3=\frac{7}{10}.$$

Ako je $A^2=I$, matrica A naziva se *involutivna* matrica.

520.

Dokazati da su matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & -i\\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

(i=imag. jedinica) involutivne.

Rješenje.

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I,$$

$$B^2=B\cdot B=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i^2&0\\0&-i^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I,$$

$$C^2=C\cdot C=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I.$$

521.

Naći sve involutivne matrice drugog reda.

Rješenje.

Neka je

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\ \text{tada je}\ A^2=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{bmatrix}.$$

Na osnovu uslova involutivnosti imamo da je:

$$A^2=I$$

$$\begin{bmatrix}a^2+bc&bc+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

tj.

$$a^2+bc=1$$

$$ab+bd=0$$

$$ac+cd=0$$

$$bc+d^2=1.$$

Moguća su dva slučaja i to:

I. *Slučaj:* $a+d\neq 0$, tada iz prednjih jednačina slijedi da je: $a=0$, $c=0$, $a=d=\pm 1$, pa imamo četiri rješenja:

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

II. *Slučaj:* $a+d=0$, tada se četiri naprijed dobijene jednačine svode samo na jednu jednačinu:

$$a^2+bc=1.$$

Odavde slijedi da su sve involutivne matrice oblika:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix},$$

na primjer:

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\end{bmatrix}\ \text{ili}\ \begin{bmatrix}2&1\\3&-2\end{bmatrix}.$$

Za involutivne matrice vrijede relacije:

$$A^T\cdot A=I$$

$$(I-A)\,(I+A)=0$$

$$Q^T\cdot Q=I\ (Q\ \text{kompleksna matrica}).$$

Naziv „involutivan" potiče od preslikavanja jer dva uzastopna preslikavanja koja dovode do identičnosti (polazne slike) nazivaju se *involutivna preslikavanja* ili *involucija*. Ova matrica je operator tog preslikavanja. Ako je $A^2=A$, matrica A naziva se *idempotentna* matrica.

522.

Ako je

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix},$$

dokazati da je $A^2=A$.

Rješenje.

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}4+2-4&-4-6+8&-8-8+12\\-2-3+4&2+9-8&4+12-12\\2+2-3&-2-6+6&-4-8+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}.$$

Idenpotentna je i jedinična matrica jer je:

$$I^2=I.$$

6.15. Polinomska matrica

Elementi a_{ik} matrice $A=(a_{ik})$ mogu da zavise od više promjenljivih i takva se matrica zove *matrična funkcija*.

Važan je slučaj u praksi kada elementi matrice zavise samo od jedne promjenljive (jednog parametra λ). Tada je matrična funkcija oblika:

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Ovakva matrica se naziva *parametarska* ili „λ-matrica“.

Od parametarskih matrica za nas su važne one čiji su elementi polinomi. Takve matrice se zovu *polinomske matrice*.

Polinomska matrica se može prikazati u obliku:

$$P(\lambda)=A_n\lambda^n+A_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+A_2\lambda^2+A_1\lambda+A_0=\sum_{r=1}^{n}A_r\lambda^r, \qquad (1)$$

gdje su koeficijenti kvadratne matrice $A_r\ (r=1,2,\ldots,n)$.

Da bi se uvidjela ova tvrdnja, treba se sjetiti pravila za sabiranje matrica i množenje matrica skalarom. Ilustrujmo to na jednoj kvadratnoj polinomskoj matrici drugog reda koja je drugog stepena po λ, tj.:

$$P(\lambda)=\begin{bmatrix} 2-3\lambda+\lambda^2 & -2\lambda+4\lambda^2 \\ 1+5\lambda & 4-\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, imamo da je:

$$a_{11}(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2 \qquad a_{12}(\lambda)=4\lambda^2-2\lambda+0$$

$$a_{21}(\lambda)=0\cdot\lambda^2+5\lambda+1 \qquad a_{22}(\lambda)=-\lambda^2+0\cdot\lambda+4.$$

Na osnovu pravila za sabiranje matrica i primjenjujući pravilo za množenje matrica skalarom, možemo pisati:

$$P(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2-3\lambda+2 & 4\lambda^2-2\lambda+0 \\ 0\cdot\lambda^2+5\lambda+1 & -\lambda^2+0\cdot\lambda+4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda^2 & 4\lambda^2 \\ 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3\lambda & -2\lambda \\ 5\lambda & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Upoređujući (2) sa (1) bilo bi:

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

523.

Polinomsku matricu:

$$A(x)=\begin{bmatrix} x^4+2x^2+1 & x^3-2x^2+x+2 \\ x-1 & x^2-x+4 \end{bmatrix}$$

napisati u obliku: $A(x)=A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0$.

Rješenje.

$$A(x)=\begin{bmatrix} x^4+2x^2+1 & x^3-2x^2+x+2 \\ x-1 & x^2-x+4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x^4+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x^3+\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Vidimo da polinomsku matricu možemo uvijek predstaviti polinomom po stepenima skalara, ali s koeficijentima koji su matrice.

Ako u relaciji (1) A_n nije nula-matrica, onda je polinomska matrica $P(\lambda)$ n-tog stepena po λ.

Ako je polinomska matrica nultog stepena, onda je ona jednaka matrici A_0 koja ne smije da bude nula matrica.

Polinomska matrica (1) identički je jednaka nula matrici, onda i samo onda, ako su svi koeficijenti nula-matrice, tj.:

$$A_n=A_{n-1}=\cdots=A_2=A_1=A_0=0.$$

Dvije polinomske matrice $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ identički su jednake, onda i samo onda, ako su koeficijenti jednakih stepena od λ jednaki.

6.16. Matrični polinomi

Pod matričnim polinomom podrazumijeva se polinom oblika:

$$P(A)=k_nA^n+k_{n-1}A^{n-1}+\cdots+k_2A^2+k_1A+k_0I, \qquad (1)$$

gdje su $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n \in C$ i A kvadratna matrica. Namjesto matrice I može se pisati matrica A^0.

Ako je $k_n \neq 0$, kažemo da je matrični polinom n-tog stepena. Polinom nultog stepena bi bio k_0I sa $k_0 \neq 0$.

Svaki matrični polinom (1) može se svesti na jednu jedinu matricu reda n, ako je matrica A reda n.

524.

Matrični polinom $P(A)=A^2-3A+6I$, gdje je:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ napiši u obliku matrice.

Rješenje.

$$P(A)=A^2-3A+6I=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^2-3\cdot\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&3\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3+6&2-3+0\\0-0+0&1-3+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\0&4\end{bmatrix}.$$

525.

Dokazati da je matrica

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$ korijen polinoma

$$P(x)=x^2-2x+2.$$

Rješenje.

$$P(A)=A^2-2A+2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}^2-2\cdot\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-2\\2&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0.$$

526.

Ako je $P(x)=x^3-3x$, naći $P(A)$ i $P(B)$ ako je:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&1&1\\0&3&0\\-1&0&-3\end{bmatrix}.$$

527.

Dokazati da je matrica:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&3\\0&1&4\end{bmatrix},$$

korijen polinoma: $P(x)=x^3-6x^2+8x-9$.

528.

Dokazati da je matrica:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{bmatrix}$$ korijen polinoma:

$$P(x)=x^2-(\alpha+\delta)x+(\alpha\delta-\beta\gamma).$$

Vidi se da su i polinomske matrice i matrični polinomi matrice. Međutim, kad polinomsku matricu pišemo u obliku polinoma, onda su članovi tog polinoma stepeni nekog skalara λ s koeficijentima koji su matrice, dok kod matričnog polinoma imamo stepene matrice sa skalarnim koeficijentima.

Polinomska matrica ne mora da bude kvadratna, dok su matrični polinomi uvijek kvadratne matrice jer se samo kvadratne matrice mogu množiti same sa sobom, pa prema tome se mogu i stepenovati.

Nije teško pokazati da se sa dva matrična polinoma $P(A)$ i $Q(A)$ mogu vršiti operacije sabiranje, oduzimanje i množenje, kao sa skalarnim polinomima $P(x)$ i $Q(x)$ koji im odgovaraju.

529.

Zbir, razlika i proizvod matričnih polinoma:

$$P(A)=A^2-A+I$$

$$Q(A)=A+I$$

redom glasi:

$$P(A)+Q(A)=(A^2-A+I)+(A+I)=A^2+2I$$

$$P(A)-Q(A)=(A^2-A+I)-(A+I)=A^2-2A$$

$$P(A)\cdot Q(A)=(A^2-A+I)\cdot(A+I)=$$

$$=A^3-A^2+A+A^2-A+I=A^3+I.$$

Dva matrična polinoma $P(A)$ i $Q(A)$ iste matrice A međusobno komutiraju. Naime, svaki član jednog polinoma komutira sa svakim članom drugog polinoma jer su ti članovi potencije jedne te iste matrice A (snabdjevene skalarnim koeficijentima).

6.17. Linearna kombinacija vektor-matrica

Ako je data matrica $A=(a_{ik})$ formata $m\times n$, onda su njene vektor-kolone $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j, \ldots, \underline{b}_n$, pa se ona može napisati u obliku:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots a_{1j}\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots a_{2j}\cdots&a_{2n}\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots a_{mj}\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=[\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j, \ldots, \underline{b}_n],$$

gdje je vektor kolona

$$\underline{b}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{bmatrix}.$$

Za vektor-kolone $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_j, \dots, \underline{b}_n$ matrice A i skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n$ vektor:

$$\underline{b} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_j \underline{b}_j + \dots \lambda_n \underline{b}_n$$

zovemo *linearna kombinacija* vektor-kolona $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_j, \dots, \underline{b}_n$ s koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Pojam linearne kombinacije vektora, jedan je od osnovnih pojmova u teoriji vektorskih prostora, a problem da se vektor $\underline{b}$ rastavi (ako je to moguće) u kombinaciju datih vektora $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ jedan je od glavnih problema. Taj problem je ekvivalentan opštoj teoriji sistema linearnih algebarskih jednačina i biće obrađen kasnije.

Za vektor-kolone $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_j, \dots, \underline{b}_n$ kažemo da su *linearno zavisne*, ako postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots \lambda_n$ takvi da je:

$$\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots + \lambda_j \underline{b}_j + \dots + \lambda_n \underline{b}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{b}_i = 0 \qquad (1),$$

a pri tome bar jedan od skalara $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nije jednak nuli.

Međutim, za vektor-kolone $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_j, \dots, \underline{b}_n$ kažemo da su *linearno nezavisne*, ako je (1) ispunjeno samo pod uslovom da su svi koeficijenti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jednaki nuli, tj. ako vrijedi relacija (1), onda ona povlači $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$.

Ako je pak, matrica A zapisana pomoću svojih vektor-vrsta $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r, \dots, \tilde{a}_m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots a_{rj} \cdots & a_{mn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mj} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{a}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix},$$

gdje je vektor-vrsta:

$$\tilde{a}_r = [a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rj}, \dots, a_{rn}],$$

onda za vektor vrste $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r, \dots \tilde{a}_m$ matrice A i skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ vektor:

$$\tilde{a} = \lambda_1 \tilde{a}_1 + \lambda_2 \tilde{a}_2 + \dots + \lambda_r \tilde{a}_r + \dots + \lambda_m \tilde{a}_m$$

zovemo *linearna kombinacija* vektor-vrsta $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r, \dots, \tilde{a}_m$ s koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Za vektor-vrste $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r, \dots, \tilde{a}_m$ kažemo

da su *linearno zavisne*, ako postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_m$ takvi da je:

$$\lambda_1 \tilde{a}_1 + \lambda_2 \tilde{a}_2 + \dots + \lambda_r \tilde{a}_r + \dots + \lambda_m \tilde{a}_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tilde{a}_i = 0, \qquad (2)$$

a pri tome bar jedan od skalara $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ nije jednak nuli.

Međutim, za vektor-vrste kažemo da su *linearno nezavisne*, ako je (2) ispunjeno samo pod uslovom da su svi koeficijenti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ jednaki nuli, tj. ako vrijedi relacija (2) onda ona povlači da je:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_m = 0.$$

Sljedeće napomene su od bitne važnosti za ono što slijedi u narednim tačkama.

1. Vektori-kolone, odnosno vektori-vrste su linearno zavisni, onda i samo onda, ako se barem jedna od njih može izraziti kao linearna kombinacija ostalih vektor-kolona, odnosno vektor-vrsta.

2. Ako je broj vektor-kolona ili vektor-vrsta veći od broja komponenti svake od njih, onda su vektor-kolone, odnosno vektor-vrste linearno zavisne.

6.18. **Blok-matrice**

Kada se iz pravougaone matrice A tipa $m \times n$ uzme ma kojih r vrsta ($r < m$) i ma kojih s kolona ($s < n$), onda na njihovim presjecima stoji matrica tipa $r \times s$, koja se zove *submatrica* date matrice A. Dobijena submatrica je takođe pravougaona matrica tipa $r \times s$, a kada je $r = s$ biće kvadratna reda r.

530.

U matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$
$$\qquad\quad \uparrow \qquad \uparrow$$

na presjeku druge i treće vrste sa drugom i četvrtom kolonom stoji submatrica drugog reda:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svaka vrsta matrice A je jedna njena submatrica, a takođe i svaka kolona.

Svaki elemenat matrice je takođe submatrica reda 1. Dakle, svaka matrica se može izdijeliti na submatrice, pa će se prvobitna matrica sastojati od submatrica kao novih elemenata.

Matrica A kod koje su elementi submatrice zove se *supermatrica*.

531.

Isprekidanim linijama matrica;

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] \tag{1}$$

raspada se na četiri submatrice:

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, \quad A_{22}=\begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}.$$

Prema tome, matrica A poprima oblik:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{2}$$

i kažemo da je matrica A razbijena na blokove A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, odnosno da je (2) *blok-matrica.*

Njeni elementi su matrice, a ne brojevi, kako je to do sada bio slučaj.

Ovakav postupak razdjeljivanja matrice na submatrice naziva se *particija* matrice ili podjela matrice na blokove.

Kvadratne submatrice najvišeg reda, koje se na navedeni način dobijaju od matrice A, imaće red min (m, n).

Ako je $m \leqslant n$, onda kvadratnih submatrica najvišeg reda m biće $\binom{n}{m}$. Ako je $n \leqslant m$, onda će kvadratnih submatrica najvišeg reda n biti $\binom{m}{n}$.

Prelaz od matrice na blok-matricu čini se zbog sažetijeg zapisivanja, zbog jednostavnijeg računanja s matricama, a i zbog lakšeg shvatanja strukture polazne matrice.

Particija matrica se naročito izvodi pri množenju matrica velikim brojem vrsta i kolona. Razdjeljivanje se mora tako izvršiti da submatrice budu *saglasne* za množenje; tj. treba lijevu podijeliti crtama između vrsta, a desnu crtama između kolona, rezultujuća matrica biće podijeljena po vrstama kao lijeva, a po kolonama kao desna. Međutim, drugačije je ako se oba činioca — obje matrice — dijele crtama između vrsta i između kolona. Tada treba lijevu matricu podijeliti vertikalnim crtama (u grupe kolona) na isti način kao desnu horizontalnim crtama (u grupe vrsta). Podjela lijeve matrice horizontalnim crtama i desne vertikalnim proizvoljna je.

Nas će zanimati dvije vrste razbijanja matrica na blokove i to:

6.18.1. *Razbijanje na kolone*

Neka je $A=(a_{ik})$ matrica tipa $m \times n$. Kolone:

$$\underline{a}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \underline{a}_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

matrice A su submatrice matrice A tipa $m \times 1$. To su matrice kolone, pa matricu A možemo napisati u obliku:

$$A=[\underline{a}_1, \ \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n].$$

Ako je:

$$B=[\underline{b}_1, \ \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n],$$

matrica tipa $m \times n$, onda je:

$$k_1 A+k_2 B=[k_1 \underline{a}_1+k_2 \underline{b}_1, \ k_1 \underline{a}_2+k_2 \underline{b}_2, \ \ldots, k_1 \underline{a}_n+k_2 \underline{b}_n],$$

a to pokazuje da se linearna kombinacija $k_1 A+k_2 B$ matrica A i B može dobiti pravljenjem odgovarajućih linearnih kombinacija $k_1 \underline{a}_k+k_2 \underline{b}_k$ kolona matrica A i B.

6.18.2. *Razbijanje na vrste*

Vrste:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= [a_{11}, \ a_{12}, \ \ldots, a_{1n}] \\ \tilde{a}_2 &= [a_{21}, \ a_{22}, \ \ldots, a_{2n}] \\ \tilde{a}_m &= [a_{m1}, \ a_{m2}, \ldots, a_{mn}]. \end{aligned} \tag{4}$$

matrice A su submatrice od A tipa $1 \times n$. To su jednoredne matrice, tj. matrice vrste, pa matricu A možemo napisati u obliku:

$$A=\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix}.$$

Ako je:

$$B=[\underline{b}_1, \ \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_p],$$

matrica tipa $n \times p$, i

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix}$$

tipa $m \times n$, onda je $A \cdot B$ matrica tipa $m \times p$ i data je sa:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix} \cdot [\underline{b}_1, \ \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_p] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \underline{b}_1 & \tilde{a}_1 \underline{b}_2 \cdots & \tilde{a}_1 \underline{b}_p \\ \tilde{a}_2 \underline{b}_1 & \tilde{a}_2 \underline{b}_2 \cdots & \tilde{a}_2 \underline{b}_p \\ \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot \\ \tilde{a}_m \underline{b}_1 & \tilde{a}_m \underline{b}_2 \cdots & \tilde{a}_m \underline{b}_p \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Ovdje je $\tilde{a}_i \underline{b}_k$ proizvod matrice vrste $\tilde{a}_i$, koja ima n kolona s matricom kolonom $\underline{b}_k$, koja ima n vrsta.

Na osnovu prednjeg dobijamo sljedeću korisnu formulu:

$$A \cdot [\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_p] = [A \underline{b}_1, \ A \underline{b}_2, \dots, A \underline{b}_p], \qquad (6)$$

koja se neposredno dobija iz (5) jer prva kolona od (5) nije ništa drugo nego $A\underline{b}_1$, itd.

Množenjem kolona (3) po redu sa $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}$ i sabiranjem dobijamo k-tu kolonu matrice AB, tj.:

$$(AB)_k = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu k} \, a_\nu \qquad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Drugim riječima, k-ta kolona matrice AB je linearna kombinacija kolona matrice A. Koeficijenti te linearne kombinacije su elementi k-te kolone matrice B.

Sa blok-matricama se računa (sabira i množi) kao da su elementi matrica brojevi, a ne matrice. Jedino pri množenju treba poredak faktora čuvati, a razbijanje na blokove treba tako napraviti da su sve operacije na koje će se naići izvodljive, dakle, treba osigurati da ne dođe do „potrebe" da se sabiraju matrice različitih tipova.

532.

Sabrati matrice:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ \hline -5 & 2 & 11 \end{array}\right] \quad \text{i} \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 4 & 5 & -7 \end{array}\right].$$

Rješenje.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ \hline -5 & 2 & 11 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{7 I_2} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \\ \hline -5 & 2 & 11 \end{array}\right],$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 4 & 5 & -7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{2 I_2} & \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \\ \hline 4 & 5 & -7 \end{array}\right],$$

gdje je:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7 I_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 I_2,$$

pa će zbir da glasi:

$$A + B = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{7 I_2} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \\ \hline -5 & 2 & 11 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{2 I_2} & \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \\ \hline 4 & 5 & -7 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{9 I_2} & \begin{array}{c} 7 \\ 1 \end{array} \\ \hline -1 & 7 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

533.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} & A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} \\ A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} & A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ \hline 9 & 3 & 7 \end{array}\right].$$

534.

Pokaži da je:

$$AB=\left[\begin{array}{c|c|c}1&2&1\\3&4&-1\\\hline 2&4&2\\0&2&7\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|cc}3&4&1\\\hline -2&1&1\\\hline 0&2&3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\\B_{31}&B_{32}\end{bmatrix}=$$

$$=\left[\begin{array}{c|cc}-1&8&8\\1&14&2\\\hline -2&16&16\\-4&16&37\end{array}\right].$$

535.

Pokaži da je:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&0&0\\4&-5&0&0\\\hline 0&0&1&3\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc|c}0&0&2\\0&0&-1\\\hline 5&-3&4\\1&2&3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c|}{0_2}&0\\&&13\\\hline 8&3&13\end{array}\right].$$

536.

Pomnožiti sljedeće matrice, koristeći podesnu particiju:

a) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-3\\4&-1&2\\5&0&7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&1&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&4&-3\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&-2&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&4\\5&1&3\\2&-4&0\end{bmatrix}.$

6.19. Determinanta kvadratne matrice

Kako matrica nema određene brojne vrijednosti, ipak se sa njom može računati i mogu joj se pridodavati određeni izrazi ili brojevi.

Svakoj kvadratnoj matrici reda n može se pridodati *determinanta reda n*, obrazovana od elemenata same matrice. Ova se determinanta naziva determinanta matrice i obilježava se simbolično ovako:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Matrica čija je determinanta različita od nule, $\det A\neq 0$, zove se *regularna*.

Kada je determinanta matrice jednaka nuli, $\det A=0$, matrica se zove *singularna*.

Determinanta kvadratne transponovane matrice jednaka je determinanti matrice jer se transponovanjem vrijednost determinante ne mijenja.

Determinanta dijagonalne matrice jednaka je proizvodu elemenata sa glavne dijagonale. Prema tome, determinanta jedinične matrice jednaka je jedinici.

6.20. Adjungovana matrica

Kofaktor matrica A^* kvadratne matrice $A=(a_{ik})$ je matrica kofaktora A_{ik} elemenata a_{ik} zadane matrice, tj.:

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}.$$

Transponovana kofaktor matrica A^{*T} matrice A zove se *adjungovana matrica* i obilježava se sa A^{**}.

Dakle, elementi adjungovane matrice A^{**} su *kofaktori* elemenata date matrice A, ali sa transponovanim poretkom, tj.:

$$A^{**}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}.$$

537.

Naći adjungovanu matricu A^{**} matrice:

$$A=\begin{bmatrix}3&1&-2\\2&4&3\\1&-3&0\end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4&3\\-3&0\end{vmatrix}=9,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}=3,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&4\\1&-3\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&-2\\-3&0\end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3&-2\\1&0\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3&1\\1&-3\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&-2\\4&3\end{vmatrix}=11,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3&-2\\2&3\end{vmatrix}=-13,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3&1\\2&4\end{vmatrix}=10.$$

Prema tome, kofaktor matrica glasi:

$$A^* = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -10 \\ 6 & 2 & 10 \\ 11 & -13 & 10 \end{bmatrix}.$$

Transponujemo li dobijenu kofaktor matricu, dobićemo traženu adjungovanu matricu:

$$A^{**} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & -13 \\ -10 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Adjungovana matrica A^{**} je komutativna sa svojom matricom A, tj.

$$AA^{**} = A^{**}A.$$

Osim toga, taj proizvod je jednak skalarnoj matrici čiji su elementi jednaki determinanti matrice A, tj.:

$$AA^{**} = A^{**}A = \begin{bmatrix} |A| & & & 0 \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |A| \end{bmatrix} = |A| \cdot I_n.$$

Vidimo da je:

$$\det AA^{**} = (\det A)^n,$$

dok je:

$$\det A^{**} = (\det A)^{n-1}.$$

538.

Za matricu A iz prethodnog primjera provjeriti relacije:

$$AA^{**} = A^{**}A = |A|\, I_3,$$

$$\det AA^{**} = (\det A)^3,$$

$$\det A^{**} = (\det A)^2.$$

Rješenje.

$$AA^{**} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & -13 \\ -10 & 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} = 50 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{**}A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & -13 \\ -10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} = 50 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det A = 50,$$

$$\det AA^{**} = \begin{vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = 50 \cdot 50 \cdot 50 = 50^3 = (\det A)^3,$$

$$\det A^{**} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & -13 \\ -10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 2500 = 50^2 = (\det A)^2.$$

Adjungovana matrica proizvoda matrica jednaka je proizvodu adjungovanih matrica činilaca uzetih u obrnutom poretku.

$$(AB)^{**} = B^{**}A^{**}$$

$$\det (AB)^{**} = \det B^{**} \cdot \det A^{**} = (\det B)^{n-1} \cdot (\det A)^{n-1}.$$

539.

Za matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

pokazati da vrijede prednje dvije relacije.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A^{**} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \det A^{**} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10,$$

$$B^{**} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \det B^{**} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & 6 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}, \qquad (AB)^{**} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -18 & 16 \end{bmatrix},$$

$$\det B^{**} \cdot \det A^{**} = 2 \cdot 10 = 20,$$

$$\det (AB)^{**} = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -18 & 16 \end{vmatrix} = 20.$$

540.

Odrediti adjungovane matrice matrica:

1) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

3) $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 5 & 5 & 5\end{bmatrix}$,

4) $D=\begin{bmatrix}1 & 1+i & -i\\ 0 & i & 1-2i\\ 1 & 1 & i\end{bmatrix}$.

6.21. Inverzna matrica

Ako je matrica A reda n regularna ($\det A\neq 0$), onda se elementi njene adjungovane matrice A^{**} mogu pomnožiti brojem $\frac{1}{\det A}$. Tako dobijena matrica zove se *inverzna matrica* matrice A u oznaci:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{**}$$

i ima svojstvo da pomnožena sa A bilo slijeva, bilo zdesna daje jediničnu matricu I, tj.:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

Dakle, ako želimo naći inverznu matricu A^{-1} matrice A, tada treba postepeno odrediti pojedine elemente i to:

Prvo: Kofaktore ili algebarske komplemente $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$ svih elemenata a_{ik} zadane matrice A.

Drugo: Sastaviti matricu kofaktora A^*.

Treće: Transponujmo matricu kofaktora A^* i dobijemo adjungovanu matricu A^{**}.

Četvrto: Adjungovanu matricu A^{**} podijelimo determinantom $\det A$ matrice A i dobijemo inverznu matricu A^{-1}.

541.

Odrediti inverznu matricu A^{-1} zadane matrice:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Prvo: Izračunajmo kofaktore A_{ik} matrice A.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}=38$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-27$$

$$A_{21}=1,\quad A_{22}=-41,\quad A_{23}=29$$

$$A_{31}=-1,\quad A_{32}=34,\quad A_{33}=-24$$

$$\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=2\cdot(-1)+5\cdot 38+7\cdot(-27)=-1.$$

Drugo: Matrica kofaktora glasi:

$$A^*=\begin{bmatrix}-1 & 38 & -27\\ 1 & -41 & 29\\ -1 & 34 & -24\end{bmatrix}.$$

Treće: Adjungovana matrica glasi:

$$A^{**}=A^{*T}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{bmatrix}.$$

Četvrto:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{**}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{bmatrix}.$$

542.

Ako je data kvadratna matrica drugog reda:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},$$

odrediti matricu

$X=\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}$ tako da je $A\cdot X=I$, gdje je I kvadratna matrica drugog reda.

Rješenje.

$$A\cdot X=I$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}x+a_{12}z & a_{11}y+a_{12}u\\ a_{12}x+a_{22}z & a_{21}y+a_{22}u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti matrica imamo da je:

$$a_{11}x+a_{12}z=1$$
$$a_{11}y+a_{12}u=0$$
$$a_{21}x+a_{22}z=0$$
$$a_{21}y+a_{22}u=1.$$

Iz ovog sistema jednačina, pod pretpostavkom da je $\det A\neq 0$, nalazimo da je:

$$x=\frac{a_{22}}{\det A},\quad y=-\frac{a_{12}}{\det A},\quad z=-\frac{a_{21}}{\det A},\quad u=\frac{a_{11}}{\det A}.$$

Prema tome, tražena matrica X glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & -\frac{a_{12}}{\det A} \\ -\frac{a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Dakle, ako je:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

regularna matrica ($\det A\neq 0$), tada je:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & \frac{-a_{12}}{\det A} \\ \frac{-a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}.$$

543.

Odrediti matricu A ako je njena adjungovana matrica:

$$A^{**}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Tražena matrica A mora biti kvadratna i trećeg reda, tj.

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Da bismo našli njenu adjungovanu matricu A^{**}, treba prethodno odrediti kofaktor matricu A^*, tj.:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=b_2c_3-b_3c_2,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=b_3c_1-b_1c_3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_3c_2-a_2c_3,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1c_3-a_3c_1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=a_3b_1-a_1b_3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=b_1c_2-b_2c_1,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_2c_1-a_1c_2,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

Prema tome, matrica kofaktora A^* i adjungovana matrica A^{**} glasi:

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

$$A^{**}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \\ a_3c_2-a_2c_3 & a_1c_3-a_3c_1 & a_2c_1-a_1c_2 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je:

$$A^{**}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix},$$

to je:

$$\begin{bmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \\ a_3c_2-a_2c_3 & a_1c_3-a_3c_1 & a_2c_1-a_1c_2 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti dvije matrice, biće:

$$b_2c_3-b_3c_2=2 \qquad (1)$$

$$a_3c_2-a_2c_3=-6 \qquad (2)$$

$$a_2b_3-a_3b_2=8 \qquad (3)$$

$$b_3 c_1 - b_1 c_3 = -2 \quad (4)$$
$$a_1 c_3 - a_3 c_1 = 9 \quad (5)$$
$$a_3 b_1 - a_1 b_3 = -12 \quad (6)$$
$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0 \quad (7)$$
$$a_2 c_1 - a_1 c_2 = -1 \quad (8)$$
$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \quad (9)$$

Sa druge, pak, strane imamo da je:

$$\frac{1}{\det A} A^{**} A = I,$$

tj.

$$\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} 2a_1 - 2a_2 & 2b_1 - 2b_2 & 2c_1 - 2c_2 \\ -6a_1 + 9a_2 - a_3 & -6b_1 + 9b_2 - b_3 & -6c_1 + 9c_2 - c_3 \\ 8a_1 - 12a_2 + 2a_3 & 8b_1 - 12b_2 + 2b_3 & 8c_1 - 12c_2 + 2c_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu jednakosti matrica dobija se:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2a_1 - 2a_2}{\det A} = 1 \\ &\frac{-6b_1 + 9b_2 - b_3}{\det A} = 1 \\ &\frac{8c_1 - 12c_2 + 2c_3}{\det A} = 1 \end{aligned}\right\}$$

Ove tri jednačine nećemo koristiti jer nismo u mogućnosti da odredimo det A.

$$\left.\begin{aligned} -6a_1 + 9a_2 - a_3 &= 0 \\ 8a_1 - 12a_2 + 2a_3 &= 0 / :2 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{2}{3} a_1} \quad (10)$$

Ako ovu vrijednost za a_2 smijenimo u prvu jednačinu posljednjeg sistema, dobićemo da je:

$$\boxed{a_3 = 0} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} 2b_1 - 2b_2 &= 0 / :2 \\ 8b_1 - 12b_2 + 2b_3 &= 0 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow \boxed{b_2 = b_1}. \quad (12)$$

Ako b_2 iz (12) smijenimo u drugu jednačinu prednjeg sistema dobićemo da je:

$$\boxed{b_3 = 2b_1} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} 2c_1 - 2c_2 &= 0 / :2 \\ -6c_1 + 9c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{c_2 = c_1}. \quad (14)$$

Relacija (14) i druga jednačina prednjeg sistema daje:

$$\boxed{c_3 = 3c_1} \quad (15)$$

Jednačina (3) i relacije (10), (11) i (13) daju:

$$\frac{2}{3} a_1 \cdot 2b_1 = 8$$

$$\boxed{a_1 b_1 = 6} \quad (a)$$

Jednačina (4) i relacije (13) i (15) daju:

$$2b_1 c_1 - b_1 \cdot 3c_1 = -2$$

$$\boxed{b_1 c_1 = 2} \quad (b)$$

Na kraju, jednačina (5) i relacije (11) i (15) daju:

$$a_1 \cdot 3c_1 = 9$$

$$\boxed{a_1 c_1 = 3} \quad (c)$$

Iz relacija (a), (b) i (c) dobija se:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{b_1}{a_1} = \frac{2}{3} \\ &a_1 b_1 = 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_1^2 = 4 \Rightarrow \boxed{b_1 = \pm 2},$$ a pošto je $b_1 = b_2$,

to je: $\boxed{b_2 = \pm 2}$, a iz $b_3 = 2b_1$ dobija se: $\boxed{b_3 = \pm 4}$.

Iz (a) slijedi da je: $\boxed{a_1 = \pm 3}$, a iz $a_2 = \frac{2}{3} a_1$ da je:

$\boxed{a_2 = \pm 2}$, dok relacija (11) daje nam da je: $\boxed{a_3 = 0}$.

Analogno dobijamo da je: $\boxed{c_1 = \pm 1}$ $\boxed{c_2 = \pm 1}$ i $\boxed{c_3 = \pm 3}$. Prema tome, tražena matrica A glasi:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Provjera. Pošto je $\det A = 2$ i $\frac{1}{\det A} A^{**} A = I$, to je:

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverzna matrica ima sljedeća svojstva:

1. Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ regularne matrice istog reda, onda važi jednakost:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

2. Ako je A regularna matrica, tada je:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

3. Ako je A regularna matrica, tada je:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

4. Ako je A regularna matrica, tada je:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

544.

Izračunati matricu A^{-2} ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Inverzna matrica matrice A glasi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Služeći se svojstvom da je:

$$A^{-2} = (A^{-1})^2,$$

imamo da je:

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -7 & -6 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

545.

Ako je n prirodan broj, i ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

pokazati da je:

$$(X^{-1} AX)^n = X^{-1} A^n X = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Prvo dokažimo da je:

$$(X^{-1} AX)^n = X^{-1} A^n X. \tag{1}$$

1. Za $n = 1$ očigledno vrijedi.
2. Za $n = 2$ takođe vrijedi jer je:

$$(X^{-1} AX)^2 = X^{-1} \underbrace{AX \cdot X^{-1}}_{I} AX = X^{-1} \underbrace{AI}_{A} AX = X^{-1} A\, AX = X^{-1} A^2 X.$$

Pretpostavimo da vrijedi za n i dokažimo da vrijedi i za $n+1$, tj.:

$$(X^{-1} AX)^{n+1} = (X^{-1} AX)^n \cdot (X^{-1} AX) = X^{-1} A^n \underbrace{X \cdot X^{-1}}_{I} AX =$$

$$= X^{-1} \underbrace{A^n I}_{A^n} AX = X^{-1} A^n AX = X^{-1} A^{n+1} X.$$

Time smo pokazali da relacija (1) vrijedi za bilo koji prirodan broj. Sada, da bismo dokazali i drugi dio tvrdnje, tj. da je:

$$X^{-1} A^n X = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix},$$

potrebno je naći X^{-1} i A^n datih matrica X i A.

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$X^{-1} A^n X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2n-1 \\ -3 & -3n+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}.$$

546.

Odrediti A^{-1}, ako je:

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}, \quad \left(a = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right).$$

547.

Odrediti inverznu matricu matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

548.

Odrediti realnu regularnu matricu oblika:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \text{ ako je } A + A^{-1} = 0.$$

6.22. Rješavanje sistema linearnih jednačina

Poznavanje inverzne matrice od velike je važnosti u teoriji rješavanja sistema linearnih jednačina.

Da to pokažemo, napomenimo da sistem:

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{matrix} \qquad (1)$$

od n linearnih jednačina sa n nepoznatih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ možemo u matričnoj formi ovako napisati:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ili

$$AX = B. \qquad (3)$$

Ako je matrica sistema A regularna ($\det A \neq 0$), onda postoji inverzna matrica A^{-1} i množenjem jednakosti (3) slijeva sa A^{-1}, dobijamo rješenje sistema (1) u obliku:

$$X = A^{-1} B \qquad (4)$$

549.

Riješiti primjenom formule (4) sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} B.$$

Odredimo inverznu matricu A^{-1} matrice A.

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = -1, \quad A_{13} = 0$$

$$A_{21} = -12, \quad A_{22} = 17, \quad A_{23} = -2$$

$$A_{31} = 5, \quad A_{32} = -7, \quad A_{33} = 1$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -12 & 17 & -2 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{**} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{**} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -24+15 \\ -1 & +34-21 \\ 0 & -4+3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tj.

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = 1.$$

550.

Riješiti sistem jednačina:

$$x + y + 2z = -1$$
$$2x - y + 2z = -4$$
$$4x + y + 4z = -2.$$

Rješenje:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$A_{11} = -6, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 6,$$
$$A_{21} = -2, \quad A_{22} = -4, \quad A_{23} = 3,$$
$$A_{31} = 4, \quad A_{32} = 2, \quad A_{33} = -3,$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A^{**} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{**} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & +\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -2 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2. \end{cases}$$

551.

Riješiti sisteme jednačina:

a) $5x - 3y = 4$

$7x - 5y = -8$

b) $3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 = -1$

$9x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 1$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

6.23. Ekvivalentne matrice

Pod elementarnim transformacijama jedne matrice smatraju se operacije

1. Razmjena dvije vrste, odnosno kolone.

2. Dodavanje elemenata jedne vrste, odnosno kolone, odgovarajućim elementima druge vrste, odnosno kolone, pošto su prethodno prvi pomnoženi proizvoljnim brojem.

3. Množenje elemenata jedne vrste, odnosno kolone, nekim brojem različitim od nule.

Za dvije matrice koje se mogu transformisati jedna u drugu konačnim brojem elementarnih transformacija, kaže se da su *ekvivalentne*.

Ako su dvije matrice A i B ekvivalentne, to se označava sa

$$A \sim B.$$

Iz ove relacije ne slijedi da je $A = B$ niti $\det A = \det B$.

552.

Dokazati da su matrice:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 8 & 5\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix} \text{ i } B=\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ekvivalentne.

Rješenje.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 8 & 5\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 8 & 5\end{bmatrix}\begin{matrix}R_2\\ R_1\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{matrix}R_2\\ R_1+2R_2\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}R_2\\ \frac{1}{5}(R_1+2R_2)\end{matrix}=B.$$

553.

Primjenom elementarnih transformacija na matricu sistema jednačina:

$$2x-y+3z-u=9$$

$$x+y-2z+4u=-1$$

$$3x+2y-z+3u=0$$

$$5x-2y+z-2u=9,$$

riješi dati sistem.

Rješenje. Prije svega, napišimo dati sistem u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 4\\ 3 & 2 & -1 & 3\\ 5 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ -1\\ 0\\ 9\end{bmatrix}.$$

Da bismo u donjem desnom uglu dobili jedinicu, treba četvrtoj vrsti dodati treću. Ovu transformaciju treba primijeniti i na matricu – kolonu slobodnih članova, tj.

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 4\\ 3 & 2 & -1 & 3\\ 8 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ -1\\ 0\\ 9\end{bmatrix}.$$

Da bismo dobili iznad dobijene jedinice u četvrtoj koloni nule, treba prvoj vrsti dodati četvrtu, od druge vrste oduzeti četvorostruku četvrtu, a od treće utrostručenu četvrtu.

$$\begin{bmatrix}10 & -1 & 2 & 0\\ -31 & 1 & -2 & 0\\ -21 & 2 & -1 & 0\\ 8 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\ -37\\ -27\\ 9\end{bmatrix}.$$

Promijenimo li znak trećoj vrsti, zatim nju utrostručenu oduzmemo od prve, a udvostručenu dodamo drugoj, dobiće se:

$$\begin{bmatrix}-53 & 5 & 0 & 0\\ 11 & -3 & 0 & 0\\ 21 & -2 & 1 & 0\\ 8 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-63\\ 17\\ 27\\ 9\end{bmatrix}.$$

Dodamo li drugoj vrsti prvu i dijeleći sa dva, dobija se:

$$\begin{bmatrix}-53 & 5 & 0 & 0\\ -21 & 1 & 0 & 0\\ 21 & -2 & 1 & 0\\ 8 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-63\\ -23\\ 27\\ 9\end{bmatrix}.$$

Na kraju oduzmemo od prve vrste petostostruku drugu i podijelimo sa 52 dobićemo:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -21 & 1 & 0 & 0\\ 21 & -2 & 1 & 0\\ 8 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -23\\ 27\\ 9\end{bmatrix}.$$

Na taj način smo matricu sistema sveli na donju trougaonu, a dati sistem ekvivalentan sljedećem:

$$x=1$$

$$-21x+y=-23$$

$$21x-2y+z=27$$

$$8x+u=9,$$

odakle nalazimo da je: $x=1$, $y=-2$, $z=2$, $u=1$.

554.

Pokazati da je za $a \neq 0$ matrica:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ a & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

ekvivalentna jediničnoj matrici četvrtog reda.

Rješenje.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ a & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & a & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ a & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & a & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & a & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

555.

Riješiti dati sistem jednačina elementarnim transformacijama:

$$\begin{aligned}
x_1-x_2+x_3-3x_4+x_5&=0\\
2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5&=3\\
x_1+3x_2+x_3-2x_4-x_5&=-1\\
3x_1+2x_2-x_3+x_4+2x_5&=12\\
x_1+x_2-x_3-2x_4+x_5&=5.
\end{aligned}$$

556.

Pokazati da su matrice A i B ekvivalentne, ako je:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

b) $A=\begin{bmatrix}1 & 1+i & -i\\ 0 & i & 1+2i\\ 1 & 1+2i & 1+i\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

6.24. Gausova metoda eliminacije

Kada je broj nepoznatih $n \geqslant 4$, Kramerovo pravilo postaje nezgodno za primjenu. Tada se koristi *Gausov algoritam* koji se sastoji u tome da se determinanta sistema svede na trougaonu determinantu, tj. da se u svakoj jednačini, počev od prve, postupno smanjuje broj nepoznatih x_i, tako da se na kraju dobije jedna jednačina sa jednom nepoznatom. Kako se to radi opisaćemo na sljedećem sistemu jednačina, kod koga je $m=4$, $n=5$. Iz ovog primjera biće nam jasno kako bi se postupilo i u svakom drugom slučaju.

Posmatrajmo sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5&=b_1 && (E_1)\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5&=b_2 && (E_2)\qquad (1)\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4+a_{35}x_5&=b_3 && (E_3)\\
a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4+a_{45}x_5&=b_4 && (E_4).
\end{aligned}$$

Ako je $a_{11} \neq 0$, možemo eliminisati x_1 iz druge, treće i četvrte jednačine, tako da od druge oduzmemo prvu pomnoženu s $\frac{a_{21}}{a_{11}}$, od treće oduzmemo prvu pomnoženu s $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, a od četvrte oduzmemo prvu pomnoženu s $\frac{a_{41}}{a_{11}}$. Tako dolazimo do ekvivalentnog sistema oblika:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5&=b_1 && (E_1)\\
x_{22}'x_2+a_{23}'x_3+a_{24}'x_4+a_{25}'x_5&=b_2' && \left(E_2'=E_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}E_1\right)\\
a_{32}'x_2+a'_{33}x_3+a_{34}'x_4+a'_{35}x_5&=b_3' && \left(E_3'=E_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}E_1\right)\\
a_{42}'x_2+a_{43}'x_3+a_{44}'x_4+a_{45}'x_5&=b_4' && \left(E'_4=E_4-\frac{a_{41}}{a_{11}}E_1\right)
\end{aligned}$$

gdje je:

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j},$$

$$b_i' = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \qquad (i, j = 2, 3, 4).$$

Ako je $a_{22}' \neq 0$, možemo eliminisati x_2 iz treće i četvrte jednačine, tako da od treće oduzmemo drugu, pomnožimo s $\frac{a_{32}'}{a_{22}'}$, a od četvrte oduzmemo drugu pomnoženu s $\frac{a_{42}'}{a'_{22}}$. Tako dolazimo do ekvivalentnog sistema:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + a_{15} x_5 = b_1 \qquad (E_1)$$

$$x_{22}' x_2 + a_{23}' x_3 + a_{24}' x_4 + a_{25}' x_5 = b_2' \qquad (E_2')$$

$$a_{33}'' x_3 + a_{34}'' x_4 + a_{35}'' x_5 = b_3'' \qquad \left(E_3'' = E_3' - \frac{a_{32}'}{a_{22}'} E_2'\right)$$

$$a_{43}'' x_3 + a_{44}'' x_4 + a_{45}'' x_5 = b_4'' \qquad \left(E_4'' = E_4' - \frac{a_{42}'}{a_{22}'} E_2'\right)$$

gdje je:

$$a_{ij}'' = a_{ij}' - \frac{a_{i2}'}{a_{22}'} a_{2j}'$$

$$b_i'' = b_i' - \frac{a_{i2}'}{a_{22}'} b_2' \qquad (i, j = 3, 4).$$

Konačno, ako je i $a_{33}'' \neq 0$, možemo eliminisati x_3 iz četvrte jednačine, tako da od te jednačine oduzmemo treću pomnoženu sa $\frac{a_{33}''}{a_{33}''}$. Tako dolazimo do sistema:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + a_{15} x_5 = b_1 \qquad (E_1)$$

$$a_{22}' x_2 + a_{23}' x_3 + a_{24}' x_4 + a_{25}' x_5 = b_2' \qquad (E_2')$$

$$a_{33}'' x_3 + a_{34}'' x_4 + a_{35}'' x_5 = b_3'' \qquad (E_3'')$$

$$a_{44}''' x_4 + a_{45}''' x_5 = b_4''' \qquad \left(E_4''' = E_4'' - \frac{a_{43}''}{a_{33}''} E_3''\right),$$

koji je ekvivalentan sistemu (1), ali je od njega mnogo jednostavniji. Naime, ako je $a_{44}'' \neq 0$, možemo iz četvrte jednačine izračunati x_4, tj. riješiti tu jednačinu po x_4. (Za x_5 možemo uzeti bilo koji realan broj.) Kad imamo x_4 (u zavisnosti od x_5), možemo iz treće jednačine izračunati x_3, pa dalje iz druge x_2 i konačno iz prve x_1.

557.

Primjenom Gausove metode eliminacije, riješi sistem jednačina:

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 14$$
$$4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$$
$$6x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 7$$
$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 13$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 14$$
$$-9x_2 + x_3 + 3x_4 = -18$$
$$-9x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -35$$
$$-6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 14$$
$$-9x_2 + x_3 + 3x_4 = -18$$
$$-5x_3 + 2x_4 = -17$$
$$\frac{21}{9} x_3 - \frac{36}{9} x_4 = \frac{99}{9}$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 14$$
$$-9x_2 + x_3 + 3x_4 = -18$$
$$-5x_3 + 2x_4 = -17$$
$$-\frac{138}{45} x_4 = \frac{138}{45}$$

$$x_4 = -1$$

$$x_3 = -\frac{-17 + 2}{5} = 3$$

$$x_2 = -\frac{-18 - 3 + 3}{9} = 2$$

$$x_1 = \frac{14 - 8 - 3 - 1}{2} = 1.$$

558.

Pokaži da Gausovom metodom eliminacije od sistema:

$$x_1-5x_2+4x_3-x_4+7x_5=2$$
$$x_1-4x_2+3x_3+x_4+6x_5=3$$
$$x_1-5x_2+5x_3-2x_4+8x_5=2$$
$$2x_1-10x_2+9x_3-2x_4+12x_5=8$$

dolazimo do ekvivalentnog sistema:

$$x_1-5x_2+4x_3-x_4+7x_5=2$$
$$x_2-x_3+2x_4-x_5=1$$
$$x_3-x_4+x_5=0$$
$$x_4-3x_5=4.$$

559.

Gausovom metodom riješi sistem jednačina:

$$x_1-5x_2+4x_3-x_4+x_5=2$$
$$2x_1-9x_2+7x_3+0x_4+13x_5=5$$
$$x_1-5x_2+5x_3-2x_4+8x_5=2$$
$$x_1-4x_2+4x_3+x_4+4x_5=7.$$

Može se slobodno reći da je Gausova metoda eliminacije najvažnija metoda rješavanja sistema linearnih jednačina u numeričkoj matematici, jer se elementarne operacije lako izvode na računskim mašinama. Značenje te metode u posljednje vrijer e je još više poraslo u vezi s linearnim programiranjem.

6.25. **Rang matrice**

Rang matrice se mogu na razne načine definisati, međutim, mi ćemo to u ovoj tački učiniti na način koji će nam biti najjasniji, vodeći računa o stečenom predznanju iz teorije matrica i teorije determinanti.

Matrica A ima rang r, ako među njenim kvadratnim submatricama postoji bar jedna regularna submatrica reda r, dok su sve submatrice reda višeg od r, ako postoje, singularne. Za matricu A formata $m\times n$ kažemo da je *maksimalnog ranga*, onda i samo onda, ako ne postoji ni jedna matrica formata $m\times n$ čiji je rang veći od ranga matrice A, tj. ako je:

$$\text{rang}\,A=\min(m,\,n)$$

560.

Prva od matrica:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

je maksimalnog ranga, a druga nije.

Kvadratna matrica maksimalnog ranga je *regularna*, a kvadratna matrica čiji rang nije maksimalan je *singularna*.

Rang nula – matrice je 0.

Rang matrica ima sljedeća svojstva:

1. rang $A=$ rang A^T.

2. Rang proizvoda dvije matrice nije veći od ranga ni jedne od tih matrica, tj.

$$\text{rang}\,(AB)\leqslant\min(\text{rang}\,A,\ \text{rang}\,B).$$

3. Rang matrice se ne mijenja permutacijom vrsta i kolona.

4. Ako neku vrstu ili kolonu matrice A pomnožimo skalarom $\lambda\neq0$, pa je saberemo sa nekom drugom vrstom ili kolonom matrice A, rang matrica se neće promijeniti.

5. Rang matrica A se neće promijeniti ako se neka vrsta ili kolona pomnoži s nekim od nule različitim faktorom.

6. Izostavljanjem iz matrice A neke vrste ili kolone, čiji su elementi nule, rang matrica A se neće promijeniti.

7. Ako neka matrica ima rang r, onda ona sadrži r vektor-kolona i r vektor-vrsta, koje su linearno nezavisne, a ostale su vektor-kolone, odnosno vektor-vrste linearna kombinacija tih r vektor-kolona, odnosno vektor-vrsta.

8. Ako je zadano r n-komponentnih vektor-kolona ili vektor-vrsta, onda su ti vektori linearno nezavisni, onda i samo onda, ako je rang matrice njihovih komponenata jednak broju vektora r.

9. Množenjem pravougle matrice s regularnom (kvadratnom) matricom (bilo slijeva, bilo zdesna) ne mijenja njen rang.

10. Dvije matrice formata $m\times n$ su ekvivalentne, onda i samo onda, ako im je rang isti.

11. Rang zbira dvije ili više matrica istog formata najviše je jednak zbiru rangova pojedinih sabirnika.

561.

Rang matrice: $A=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ jednak je 3 jer je det $A\neq0$.

562.

Rang matrice: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$ jednak je 2 jer je $\det A=0$, a postoji jedna subdeterminanta drugog reda $\neq 0$, tj. $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

563.

Rang matrice: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}$ jednak je 2, pošto postoji subdeterminanta drugog reda: $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0$, dok su sve ostale višeg reda jednake nuli, tj.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 3\\ -1 & -2 & 2\end{bmatrix}=0,\quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 5\\ -1 & -2 & -7\end{bmatrix}=0,\quad \begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\\ -1 & 6 & -7\end{bmatrix}=0,$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 4 & 3 & \text{[illegible]}\\ -2 & 6 & -7\end{bmatrix}=\theta.$$

Napomena: Da bi čitalac znao koliko u matrici A formata $m\times n$ ima kvadratnih submatrica najvišeg reda, poslužiće mu sljedeće:

1. Ako je $m\leqslant n$, kvadratnih submatrica najvišeg reda m biće $\binom{n}{m}$.

2. Ako je $n\leqslant m$, kvadratnih submatrica najvišeg reda n biće $\binom{m}{n}$.

564.

U matrici: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 4 & -2 & -2\\ 1 & 4 & -3 & -5\end{bmatrix}$ prve dvije vrste su proporcionalne, pa su stoga sve kvadratne submatrice trećeg reda singularne, dok drugog nisu, te je rang $A=2$.

565.

Pokaži da rang matrice:

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ a & b & c & d\end{bmatrix}$$

može biti najviše 2, a najmanje 0.

Rješenje. Pošto su prva i treća vrsta date matrice jednake, to matrica mora imati rang manji od 3, a to znači najviše 2. Ona će biti ranga jedan, ako su joj sve tri vrste međusobno jednake, a nula ako su joj svi elementi a, b, c, d, e, f, g, h jednaki nuli.

566.

Elementarnim transformacijama nad vrstama ili kolonama odredi rang matrice:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4\\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0\end{bmatrix}.$$

Rješenje. Pošto matrica i njoj ekvivalentna matrica imaju isti rang, to nam je dopušteno da primijenimo elementarne transformacije za iznalaženje ranga matrice.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4\\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}(E_1)\\ (E_2)\\ (E_3)\\ (E_4)\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{matrix}(E_1)\\ (E_2)\\ (E_3-2E_1)\\ (E_4-2E_1)\end{matrix}\sim$$

$\sim$ [Od II kolone oduzmemo četvorostruku prvu, od III kolone trostruku I, od IV kolone dvostruku prvu i od V jednostruku prvu kolonu.] $\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\sim$

$\sim$ [Od III vrste oduzmemo II vrstu, a IV saberemo sa II vrstom.] $\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim$

$\sim$ [Dodajući II kolonu III, IV i V, prethodno pomnoženu redom sa 1, 2 i -2, dobijamo nule.] $\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$

Odavde je očigledno da je rang $A=2$ jer postoji samo jedna regularna submatrica i to drugog reda.

567.

Odrediti rang matrice:

$$A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{bmatrix}$$

za razne vrijednosti parametra λ.

Rješenje

Pošto je data matrica formata 3×4, to ona može biti najviše ranga 3. Da bi ona bila ranga manjeg od 3, treba da su joj sve submatrice trećeg reda singularne, tj. da su sve subdeterminante trećeg reda jednake nuli. Iz tog uslova izračunaćemo λ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 3.$$

Može se lako provjeriti da su i ostale subdeterminante trećeg reda za $\lambda = 3$ jednake nuli, pa je $\operatorname{rang} A = 2$ za $\lambda = 3$, a za $\lambda \neq 3$, $\operatorname{rang} A = 3$.

568.

Odrediti parametar λ tako da matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ima najmanji rang i naći taj rang. Koliki je rang matrice za ostale vrijednosti parametra λ?

Rješenje. Pošto je data matrica formata 4×4, to ona može biti najviše ranga 4. Da bi ona imala najmanji rang, a to je u ovom slučaju 2, treba da sve submatrice trećeg reda budu jednake nuli. Iz tog uslova odredimo λ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ \lambda & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \lambda = 0.$$

Za $\lambda = 0$, $\operatorname{rang} A = 2$, a za $\lambda \neq 0$, $\operatorname{rang} A = 3$, pošto je $\det A = 0$ za $\lambda = 0$.

569.

Da li postoji takav realan broj, a da je

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & a \end{bmatrix} = 3?$$

Rješenje. Pošto je data matrica formata 4×5, to njen rang može biti najviše 4. Međutim, zahtjev zadatka je da rang bude 3. Da bi bio zahtjev ispunjen, treba izabrati parametar a tako, da sve submatrice četvrtog reda budu singularne. Iz tog uslova odredićemo a:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & a \end{vmatrix} \sim - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & a \end{vmatrix} \sim - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$7a - 21 = 0$$

$$a = 3.$$

570.

Provjeriti da je $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} B = 3$ i $\operatorname{rang} C = 4$, ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

571.

Primjenom elementarnih transformacija, odrediti rang sljedećih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -295 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix}.$$

Odgovor: $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} B = 2$.

572.

U λ-matrici:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

odrediti λ tako da ona bude regularna (ima rang 3).

573.

Odrediti x tako da je:

$$\text{rang}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & x & 3 \end{bmatrix} = 3.$$

574.

Odrediti rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

i naći kakva je zavisnost između njenih vrsta odnosno kolona.

Odgovor. $\text{rang}\, A = 2$. Ako njene vrste označimo sa E_1, E_2, E_3, E_4, a kolone sa C_1, C_2, C_3, C_4, onda između vrsta postoji sljedeća zavisnost:

$$E_3 = 2E_2 - E_1$$

$$E_4 = 2E_2 - 2E_1,$$ a između kolona

$$7C_3 = 5C_1 + C_2$$

$$7C_4 = 8C_1 - 11C_2.$$

6.26. **Linearne forme**

Neka je dat stalni vektor n-tog reda $a = [a_1\ a_2 \ldots a_n]$ i promjenljivi vektor istog reda $x = [x_1\ x_2 \ldots x_n]$ na istom polju brojeva C. Skalarni proizvod ova dva vektora:

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = f(x) \qquad (1)$$

naziva se *linearna forma* promjenljivih x_i.

Stalni vektor a zove se *koeficijent-vektor forme* jer su njegove koordinate a_k koeficijenti forme. Vektor x je *vektor-promjenljive forme*.

Linearna forma (f) je specijalna skalarna funkcija vektora x. Za ove forme važe obrasci:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in V$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \qquad x \in V,\ \alpha \in C.$$

(V vektorski prostor nad poljem brojeva C).

S obzirom na prethodne relacije, uopšte važi da je:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k + \cdots + \alpha_n x_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

za sve vektore $x_k \in V$, $k = 1, 2, \ldots, n$ i sve brojeve $\alpha_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Linearna forma $f(x)$ je identički jednaka nuli, samo ako je koeficijent-vektor forme jednak nuli, $a = 0$, tj. ako su svi njegovi koeficijenti jednaki nuli $(a_k = 0)$.

Ako je dato m linearnih formi f_i istih promjenljivih $x_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ sa različitim koeficijent-vektorima $a_i = [a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}]$, tada se može formirati linearna forma od svih linearnih formi i zove se *linearna kombinacija* linearnih formi, tj.

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k.$$

Matrica:

$$A = (a_{ik})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

je *koeficijent-matrica* skupa linearnih formi f_i.

Linearne forme $f_1, f_2, \ldots, f_m$ su *linearno zavisne*, ako postoje konstante $c_1, c_2, \ldots, c_m$, od kojih nisu sve jednake nuli, tako da je:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m \equiv 0.$$

U protivnom, linearne forme $f_1, f_2, \ldots, f_m$ su *linearno nezavisne*.

575.

Forme:

$$f_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$f_2 = -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$f_3 = x_1 - 3x_2 - x_3$$

su linearno zavisne.

Rješenje. Zaista, izraz:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 \equiv 0,$$

tj.

$$c_1(x_1+2x_2+2x_3)+c_2(-2x_1+x_2-x_3)+c_3(x_1-3x_2-x_3)\equiv 0$$

$$(c_1-2c_2+c_3)x_1+(2c_1+c_2-3c_3)x_2+(2c_1-c_2-c_3)x_3\equiv 0$$

ako, i samo ako, je:

$$c_1-2c_2+c_3=0$$

$$2c_1+c_2-3c_3=0$$

$$2c_1-c_2-c_3=0.$$

Determinanta ovog homogenog sistema je jednaka nuli, pa postoje i netrivijalna rješenja (osim trivijalnih $c_1=c_2=c_3=0$). Ona su $c_1=c_2=c_3=k$ (k realan broj), te je:

$$f_1+f_2+f_3=0.$$

576.

Forme:

$$f_1=x_1+x_2+x_3$$

$$f_2=x_1+2x_2+3x_3$$

$$f_3=x_1+3x_2+6x_3$$

su linearno nezavisne.

Rješenje. Zaista, izraz:

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3\equiv 0$$

tj.

$$c_1(x_1+x_2+x_3)+c_2(x_1+2x_2+3x_3)+c_3(x_1+3x_2+6x_3)\equiv 0$$

$$(c_1+c_2+c_3)x_1+(c_1+2c_2+3c_3)x_2+(c_1+3c_2+6c_3)x_3\equiv 0$$

onda, i samo onda, ako je:

$$c_1+c_2+c_3=0$$

$$c_1+2c_2+3c_3=0$$

$$c_1+3c_2+6c_3=0.$$

Kako je determinanta ovog homogenog sistema različita od nule, postoje samo trivijalna rješenja $c_1=c_2=c_3=0$.

Linearne forme f_i su međusobno linearno zavisne, odnosno nezavisne, onda kad su njihovi koeficijent-vektori linearno zavisni, odnosno linearno nezavisni. Ti vektori obrazuju koeficijent-matricu, pa se ispitivanje zavisnosti svodi na određivanje ranga ove matrice čije su vrste koeficijent-vektori formi f_i. Dakle, ako je rang matrice skupa linearnih formi $f_1, f_2, \dots f_m$ jednak r, onda među njima postoji tačno r linearno nezavisnih formi. Sve ostale forme su linearne homogene kombinacije od tih r linearno nezavisnih formi.

577.

Linearne forme:

$$f_1=5x_1+3x_2$$

$$f_2=x_1+2x_2+4x_3$$

$$f_3=2x_1+x_2+x_3$$

su linearno nezavisne.

Rješenje. Koeficijent-matrica datih formi je:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Pošto je $\det A=11\neq 0$ to je koeficijent-matrica ranga $r=3$, pa su date tri linearne forme linearno nezavisne.

578.

Linearne forme:

$$f_1=3x_1-x_2+2x_3+4x_4$$

$$f_2=2x_1+3x_2-x_3+2x_4$$

$$f_3=5x_1-9x_2+8x_3-x_4$$

su linearno zavisne.

Rješenje. Koeficijent-matrica datih formi je:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -1 & 2\\ 5 & -9 & 8 & -1\end{bmatrix}.$$

Pošto su sve submatrice trećeg reda singularne (pokaži to), a postoje regularne submatrice drugog reda, onda je matrica A ranga $r=2$. Pošto je rang koeficijent-matrice manji od broja datih linearnih formi, to su one linearno zavisne. Zaista:

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0,$$

tj.

$$c_1(3x_1-x_2+2x_3+4x_4)+c_2(2x_1+3x_2-x_3+2x_4)+c_3(5x_1-$$

$$-9x_2+8x_3-x_4)=0$$

$$(3c_1+2c_2+c_3)x_1+(-c_1+3c_2-9c_3)x_2+(2c_1-c_2+8c_3)x_3+$$

$$+(4c_1+2c_2-c_3)x_4=0$$

$$3c_1+2c_2+5c_3=0$$

$$-c_1+3c_2-9c_3=0$$

$$2c_1-c_2-8c_3=0$$

$$c_1+2c_2-c_3=0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -9 \end{pmatrix}, \quad \frac{c_1}{-18-15}=\frac{c_2}{-(-27+5)}=\frac{c_3}{11}$$

$$\frac{c_1}{-33}=\frac{c_2}{22}=\frac{c_3}{11}\,/:(-11)$$

$$\frac{c_1}{3}=\frac{c_2}{-2}=-c_3=k;\quad k=\text{faktor proporcionalnosti}$$

$$c_1=3k,\ c_2=-2k,\ c_3=-k,$$

$$3kf_1-2kf_2-kf_3=0\,/:k$$

$$3f_1-2f_2-f_3\equiv 0.$$

Kaže se da su vrste $[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ matrice $A=(a_{ik})_{m\times n}$ *linearno zavisne*, odnosno *linearno nezavisne*, prema tome da li su linearne forme:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

čija je matrica $A=(a_{ik})_{m\times n}$, linearno zavisne, odnosno linearno nezavisne.

Kaže se da su kolone $\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$, $(k=1, 2, \ldots, n)$ matrice $A=(a_{ik})_{m\times n}$ linearno zavisne, odnosno linearno nezavisne, prema tome da li su linearne forme:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k, \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

čija je matrica A^T, linearno zavisne, odnosno linearno nezavisne.

Determinanta matrice A jednaka je nuli, ako i samo ako, su vrste njene matrice linearno zavisne.

Ma kakva bila $m\times n$, broj njenih linearno nezavisnih vrsta jednak je broju njenih linearno nezavisnih kolona.

6.27. **Zadaci za samostalan rad**

579.

Ako su date matrice: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, izračunati:

a) $A+B$, b) $A-B$, c) $3A+2B$.

580.

Odrediti matricu T koja zadovoljava relaciju $A+2T=3B$, ako je:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

581.

Naći proizvod matrica:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [1 \ \ 2 \ \ 3]$, g) $[1 \ \ 2 \ \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

a) $\begin{bmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$, b) Nula matrica, c) $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, g) 13.

582.

Date su matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naći proizvode:

a) AC, b) ACD, c) BD, d) BC, e) $BCDA$.

Rješenje.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & 34 & -17 \end{bmatrix}$.

583.

Odrediti opšti oblik matrica B trećeg reda za koju je:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B = 0$$

Rješenje.

$$B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

584.

Ako su date matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix},$$

pokazati da su one komutativne, tj. da je:

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{bmatrix} 16 & -13 & 10 \\ -4 & 12 & -6 \\ 8 & -9 & 14 \end{bmatrix}.$$

585.

Pokazati da je proizvod matrica A i B nula matrica ako je:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \text{ i } B=\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 7 & -14 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

586.

Ako je data matrica: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Pokazati da je $A^T \cdot A$ regularna, a $A \cdot A^T$ singularna matrica, gdje je A^T transponovana matrica matrice A.

Rješenje.

$$A^T \cdot A=\begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}, \quad A \cdot A^T=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 0 & 5 & -2 \\ 11 & -2 & 25 \end{bmatrix}.$$

587.

Matricu $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ predstaviti u obliku zbira simetrične i kososimetrične matrice.

Rješenje.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}.$$

588.

Izračunati $AB-BA$, ako je:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \text{ i } B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$AB-BA=\begin{bmatrix}-10 & -4 & -7\\ 6 & 14 & 4\\ -7 & 5 & -4\end{bmatrix}.$$

589.

Dokazati da matrice:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

(i imaginarna jedinica) zadovoljavaju jednakosti:

a) $A^2=B^2=C^2=I$ c) $CA=-AC=iB$

b) $BC=-CB=iA$ d) $AB=-BA=iC$

590.

Šest matrica:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}-2 & 7 & -11\\ -2 & 7 & -12\\ -1 & 3 & -5\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}1 & 2 & -7\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}-1 & 6 & -12\\ -2 & 7 & -12\\ -1 & 3 & -5\end{bmatrix}$$

imaju osobinu da je produkt od po dvije bilo koje ponovno jedna od šest matrica.

591.

Odrediti sve matrice komutativne s matricom:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

Rješenje: Iz uslova da je $AX=XA$ dobijamo da su tražene matrice X koje su komutativne sa matricom A oblika:

$$X=\begin{bmatrix}x & 2y\\ -y & x-2y\end{bmatrix}=(x-y)\,I+y\,A.$$

592.

Matrica $S=\lambda I$, gdje je I jedinična matrica n-tog reda, a λ skalar, zove se skalarna. Pokazati da je skalarna matrica komutativna sa svim matricama n-tog reda.

Rješenje: Koristeći svojstvo jedinične matrice imamo da je:

$$SA=(\lambda I)\,A=\lambda\,(IA)=\lambda\,A$$

$$AS=A\,(\lambda I)=A\,(A\,I)=\lambda\,A,$$

tj. $SA=AS$, za bilo koju matricu n-tog reda A.

593.

Odrediti:

a) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^2$, b) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & -2\end{bmatrix}^5$, c) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}^3$.

Rješenje.

a) $\begin{bmatrix}7 & 4 & 4\\ 9 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & 8\end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix}15 & 20\\ 20 & 35\end{bmatrix}$.

594.

Odrediti $f(A)$ ako je dat polinom $f(x)=x^2-x-1$ i matrica:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$f(A)=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

595.

Dat je polinom $P(x)=x^2-5x+6$ i matrice:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Odrediti $P(A)$.

Rješenje.

$$P(A)=\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

596.

Odrediti opšti oblik matrice drugog reda za koju je:

$$A^2=0.$$

597.

Odrediti opšti oblik idempotentne matrice $(A^2=A)$ drugog reda.

598.

Dokazati da je matrica:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

nula polinoma $P(x)=x^3-6x^2+8x+9$.

599.

Dokazati da je matrica:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

nula polinoma $P(x)=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$.

600.

Odrediti inverzne matrice matrica:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

a) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\dfrac{1}{ad-bc}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

601.

Riješiti sisteme jednačina matričnim putem $(X=A^{-1}\cdot B)$:

a) $2x+3y=7$, $7x+6y=11$,

b) $3x_1-4x_2=2$, $4x_1+3x_2=-14$,

c) $2x_1-x_2+x_3=8$, $x_1-3x_2-5x_3=6$, $3x_1+x_2-7x_3=-4$.

Rješenje.

a) $x=-1$, $y=3$. b) $x_1=x_2=-2$. c) $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=1$.

602.

Odrediti nepoznatu matricu X iz jednačina:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $X\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\cdot X\cdot\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$.

603.

Naći vrijednost determinante proizvoda matrice:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

i njoj transponovane.

Rješenje. $D=45$.

604.

Provjeriti:

$$\text{a) rang}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & -2\\ 2 & 6 & -3 & -4\\ 1 & 3 & 6 & -2\end{bmatrix}=2,\quad \text{b) rang}\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4\\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0\end{bmatrix}=2.$$

$$\text{c) rang}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}=3,\quad \text{d) rang}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 4\\ 4 & 0 & 4 & 9\\ 3 & 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & -2 & -3\end{bmatrix}=2.$$

605.

Odrediti realni broj λ tako da je:

$$\text{rang}\begin{bmatrix}6 & 3 & 5 & 9\\ 5 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}=3.$$

Rješenje. $\lambda=3$.

7. VEKTORSKI RAČUN

7.1. Uvodne definicije

U raznim problemima fizike, mehanike, elektrotehnike i drugim naukama, operiše se, uglavnom, sa dvije vrste veličina i to *skalarnim* i *vektorskim*.

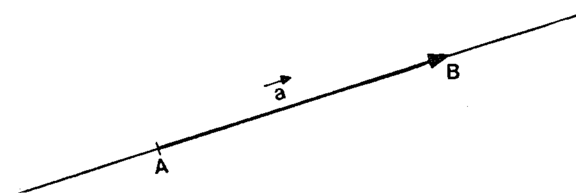
Skalarnom veličinom ili *skalarom* nazivamo onu veličinu koja je potpuno određena jednim brojem (na primjer: temperatura, masa, vrijeme, površina geometrijske figure, zapremina tijela, itd.).

Vektorskom veličinom ili *vektorom* naziva se svaka veličina koja je definisana: intenzitetom, pravcem i smjerom.

Geometrijski, vektori se predstavljaju orijentisanim dužima u ravni ili prostoru (duž sa strelicom na jednom kraju).

Označavanje vektora vrši se različito. Najčešće se vektori obilježavaju malim slovima latinice sa strelicom iznad slova, na primjer:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d},\ \vec{e},\ \ldots$$



Sl. 1.

Ako je bitno ukazati na početak i kraj vektora, onda se vektor obilježava sa dva velika slova i strelicom iznad njih, na primjer:

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{EF},\ \ldots,$$

gdje prvo slovo označava početak, a drugo slovo kraj vektora.

Dužina vektora $\vec{a}$ (orijentisane duži $\overrightarrow{AB}$) mjerena određenom mjernom jedinicom, zove se *intenzitet* ili *modul* vektora i obilježava se sa $|\vec{a}|$ ili $|\overrightarrow{AB}|$.

Intenzitet vektora ne može biti negativan, tj. uvijek je veći ili jednak nuli.

Vektor čiji je intenzitet jednak nuli naziva se *nula-vektor* i označava se sa $\vec{0}$.

Vektor čiji je intenzitet jednak jedinici zove se *jedinični vektor* ili *ort*. Jedinični vektor, vektora $\vec{a}$ označava se sa ort$\vec{a}=\vec{a}_0$.

Pravac vektora određuje prava (nosač) na kojoj se nalazi vektor. Dva ili više vektora imaju isti pravac ako su im nosači paralelni ili se poklapaju.

Za dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su *kolinearna* ako su im pravci (nosači) paralelni ili se poklapaju. Po konvenciji uzima se da je nula-vektor kolinearan sa svakim vektorom.

Smjer vektora se uzima od početne preme krajnjoj tački i označen je strelicom.

Dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti smjer ako imaju isti pravac i ako je ispunjen uslov: paralelnim pomjeranjem nosača vektora $\vec{a}$ zajedno sa vektorom $\vec{a}$ do poklapanja sa nosačem vektora $\vec{b}$, ili obratno, a zatim pomjeranjem jednog ili oba ta vektora duž tako postignutog zajedničkog nosača do poklapanja njihovih početaka ili napadnih tačaka, krajevi oba vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nalaze se sa iste strane zajedničke napadne tačke.

Prema karakteristici, da li se neki vektor može u prostoru da pomjera paralelno samom sebi, ili samo duž neke prave, ili se ne može pomjerati, vektori se dijele na: *slobodne vektore*, *vektore vezane za pravu*, i *vektore vezane za tačku*.

Slobodan vektor je onaj vektor kod koga nije bitan položaj početne tačke jer se oni mogu pomjerati paralelno samom sebi.

Za dva slobodna vektora kaže se da su jednaka, tada i samo tada, kada imaju jednake intenzitete i iste smjerove i pravce.

Pošto se u matematici, uglavnom, operiše samo sa slobodnim vektorima, to se za njih upotrebljava samo naziv *vektori*, dok ćemo prilikom upotrebe drugih vektora to posebno naglasiti.

Vektor vezan za pravu je onaj vektor kod koga početna tačka može biti ma gdje na nosaču.

Za takva dva vektora kažemo da su jednaka, tada i samo tada, ako leže na istoj pravoj, imaju isti smjer i ako su im intenziteti jednaki. Kao primjer vezanog vektora za pravu služi sila koja djeluje na čvrsto tijelo. Njeno dejstvo se neće promijeniti ako se napadna (početna) tačka sile pomjera duž pravca dejstva. Na primjer, dejstvo lokomotive na kompoziciju voza biće isto, nezavisno od toga da li se lokomotiva nalazi na početku, negdje u sredini, ili na kraju kompozicije, tj. nezavisno od položaja napadne tačke sile duž pravca dejstva sile.

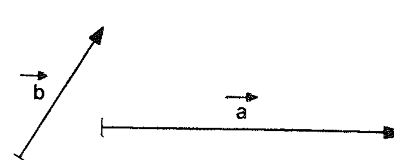
Vektor vezan za tačku je onaj vektor kod koga je položaj napadne (početne) tačke potpuno određen.

Za takva dva vektora kažemo da su jednaka, tada i samo tada, kada leže na istom pravcu (nosaču), imaju isti smjer i napadnu tačku, a intenziteti su im jednaki.

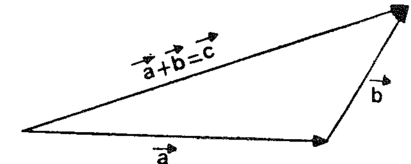
Za primjer se može uzeti jačina električnog polja jer u svakoj tački polja, jačina polja je različita.

7.2. Sabiranje i oduzimanje vektora

Posmatrajmo dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sl. 2 a). Translatornim pomjeranjem vektora $\vec{b}$ tako da mu se početak poklopi sa krajem vektora $\vec{a}$, dobijaju se dva nadovezana vektora. Sad se za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ može definisati njihov zbir.



Sl. 2a.



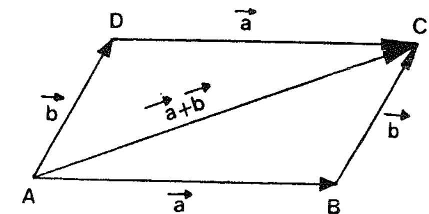
Sl. 2b.

Zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ sa početnom tačkom u početnoj tački vektora $\vec{a}$ i krajem u krajnjoj tački vektora $\vec{b}$, kad se prethodno vektor $\vec{b}$ nadoveže na vektor $\vec{a}$ i piše se:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$$

Pošto vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ obrazuju trougao (sl. 2b), to kažemo da sabiranje vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vršimo po pravilu »trougla«.

Zbir $\vec{a}+\vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ možemo dobiti i po pravilu »paralelograma« i to tako da translatirajući vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ na zajednički početak, konstruišemo paralelogram kojeg ti vektori određuju (sl. 3). Tada vektor, koji odgovara



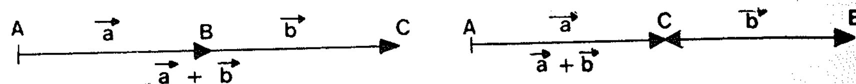
Sl. 3.

dijagonali paralelograma čiji je početak u zajedničkom početku vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeste zbir $\vec{a}+\vec{b}$. Vektor $\vec{a}+\vec{b}$, koji se dobija sabiranjem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, *rezultanta* je vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se kaže da su *komponente* vektora $\vec{a}+\vec{b}$.

Ako oba vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC}$$

pri nadovezivanju padnu na jednu pravu (sl. 4.), onda je zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektor $\vec{c}$, čiji je intenzitet jednak zbiru intenziteta vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako su im smjerovi isti, a razlici intenziteta komponenti ako su im smjerovi suprotni. U oba ova slučaja kaže se da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.



Sl. 4.

Datu definiciju zbira dva vektora lako je proširiti i na slučaj kada treba sabirati više vektora:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\quad \vec{b}=\overrightarrow{BC},\quad \vec{c}=\overrightarrow{CD},\quad \vec{d}=\overrightarrow{DE},\quad \vec{e}=\overrightarrow{EF},\quad \text{tj.}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$$

ili

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{f}.$$

Dakle, zbir konačnog broja vektora biće vektor sa napadnom tačkom u napadnoj tački prvog vektora i krajem u krajnjoj tački zadnjeg, pod uslovom da su svi vektori sabirci nadovezani vektori.

Za sabiranje vektora važe sljedeća pravila:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (zakon komutacije)

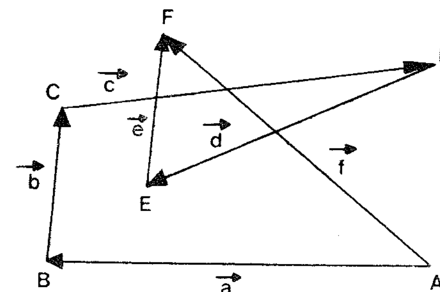
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (zakon asocijacije)

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (zakon identiteta)

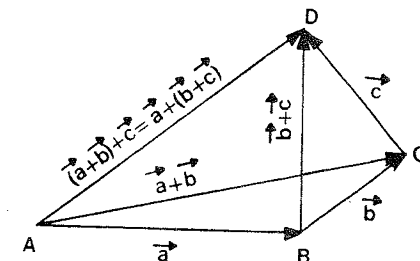
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (zakon inverzije)

Tačnost prvog pravila vidi se sa slike 3 jer nadovezivanjem vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$ ili $\vec{b}$ na $\vec{a}$ dobija se ista orijentisana dijagonala $\overrightarrow{AC}$.

Drugo pravilo je zakon asocijacije za sabiranje vektora i njegova tačnost se vidi na slici 6.



Sl. 5.



Sl. 6.

Treće pravilo, zakon identiteta, kazuje da je nula-vektor neutralni vektor u odnosu na sabiranje vektora, da mu je intenzitet nula i da može imati svaki pravac i smjer.

Četvrto pravilo, zakon inverzije, je posljedica sabiranja vektora i govori da za vektor $\vec{a}$ postoji neki vektor $\vec{b}$ takav da je $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. U tom slučaju je $\vec{b}=-\vec{a}$. Vektor $-\vec{a}$ naziva se uzajamno *suprotan vektor* vektoru $\vec{a}$. Uzajamno suprotne vektore ne treba identifikovati sa vektorima čiji su smjerovi suprotni jedan drugom. Uzajamno suprotni vektori moraju imati jednake intenzitete, dok samo suprotni vektori nemaju uopšte jednake intenzitete, već su im samo smjerovi suprotni.

Razlikom dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}-\vec{b}$ po definiciji je vektor $\vec{c}$, tj.:

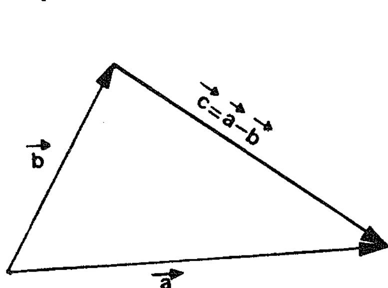
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c},$$

koji se dobija sabiranjem vektora $\vec{a}$ sa vektorom uzajamno suprotnim vektoru $\vec{b}$, tj.:

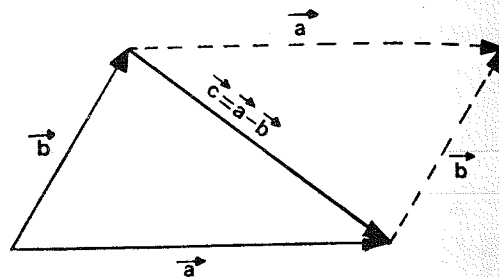
$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Razliku $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ možemo geometrijski predočiti tako da se vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedu na zajednički početak pa će vektor $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ biti onaj vektor koji se dobija spajanjem krajnje tačke umanjioca $\vec{b}$ sa krajnjom tačkom umanjenika $\vec{a}\cdot\vec{c}$ ima početak u kraju $\vec{b}$, a kraj u kraju $\vec{a}$ (sl. 7).

Konstrukcija razlike vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je na osnovu definicije, druga orijentisana dijagonala paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sl. 8).



Sl. 7.



Sl. 8.

Zbir i razliku vektora definisali smo na prednji način, a ne možda drugačije, iz razloga što se u fizici i tehničkim naukama baš preko ovakvih definicija razmatra brzina, ubrzanje, poligon i paralelogram sila i drugi problemi.

7.3. Množenje vektora skalarom

Proizvod vektora $\vec{a}$ i skalara λ je vektor $\lambda\vec{a}$ istog pravca kao i vektor $\vec{a}$, intenzitet mu je $|\lambda|\,|\vec{a}|$, a smjer mu je isti kao i smjer vektora $\vec{a}$, ako je $\lambda>0$, odnosno suprotan smjeru vektora $\vec{a}$, ako je $\lambda<0$.

Na osnovu ove definicije množenja vektora skalarom, možemo svaki vektor predstaviti proizvodom njegovog intenziteta i njegovog orta, tj.:

$$\vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{a}_0$$

Pod količnikom $\frac{\vec{a}}{\lambda}$ podrazumijeva se proizvod $\frac{1}{\lambda}\vec{a}$, tj. podijeliti vektor $\vec{a}$ skalarom $\lambda\neq0$, znači podijeliti njegov intenzitet ovim skalarom, a zadržati mu isti smjer ako je $\lambda>0$, odnosno promijeniti ga ako je $\lambda<0$.

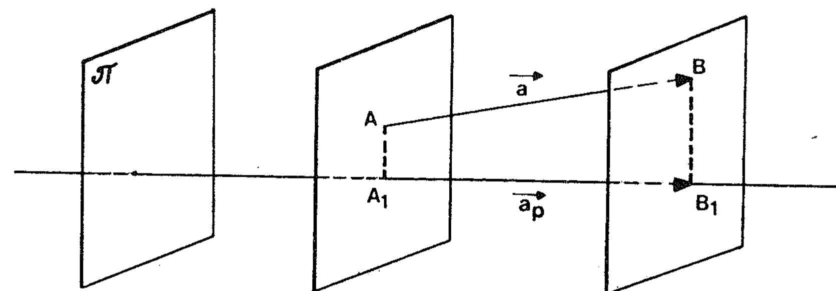
Iz jednakosti $\vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{a}_0$ na osnovu ove definicije slijedi da je ort $\vec{a}_0$ bilo kojeg vektora $\vec{a}\neq0$ jednak količniku vektora $\vec{a}$ i njegovog intenziteta $|\vec{a}|$, tj. $\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Za množenje vektora skalarom važe sljedeća pravila:

1. $1\vec{a}=\vec{a}$ — identičnost
2. $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$
3. $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$ — komutativnost
4. $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$ — asocijativnost
5. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ — distributivnost
6. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ — distributivnost
7. $0\,\vec{a}=\vec{0}$
8. $\lambda\vec{0}=\vec{0}$.

7.4. Projekcija vektora na pravu i osu

Uzmimo vektor $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ i pravu p, kao i ravan π koja siječe pravu p (sl. 9). Konstruišimo paralelno ravni π projekcije tačaka A i B na pravu p, tj. tačke A_1 i A_2. Vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$ je *projekcija* vektora $\overrightarrow{AB}$ na pravu p paralelno ravni π, i zove se *komponenta* vektora $\overrightarrow{AB}$ po pravoj p paralelno ravni π. Komponenta $\overrightarrow{A_1B_1}$ obilježava se kratko sa $\vec{a}_p$. Ako je ravan π

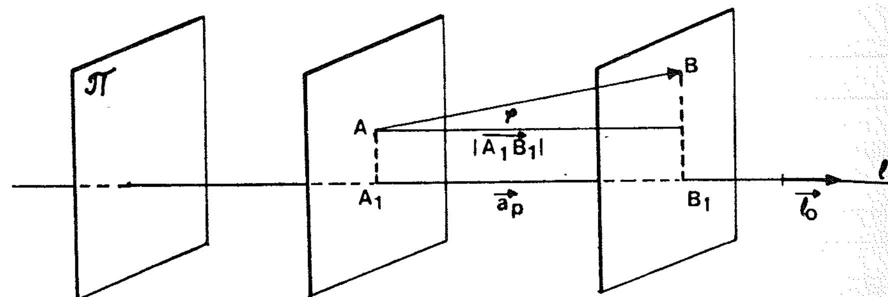


Sl. 9.

normalna na pravu p, kaže se da je vektor $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}_p$ *normalna projekcija* vektora $\overrightarrow{AB}$ na pravu p, inače je kosa. Tada je vektor $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}_p$ *normalna komponenta* vektora $\overrightarrow{AB}$ po pravoj p, inače je kosa.

Neka je data osa l i vektor $\overrightarrow{AB}$, kao i ravan π koja siječe osu l. Konstruišimo paralelno ravni π projekcije tačaka A i B na osu l, tj. tačke A_1 i B_1. Vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$ je komponenta vektora $\overrightarrow{AB}$ na osi l s obzirom na ravan π

(sl. 10). Vidimo da je geometrijska projekcija datog vektora $\overrightarrow{AB}$ na datu osu (ili na dati vektor) vektor. Međutim, u računu sa vektorima, pod projekcijom vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu l uzima se algebarska vrijednost (intenzitet) vektora $\overrightarrow{A_1B_1}$, tj. $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, pred kojim stoji znak + ili − u zavisnosti od toga da li je smjer komponente $\overrightarrow{A_1B_1}$ i ose l isti ili različit.



Sl. 10.

Simbolička oznaka za algebarsku vrijednost (intenzitet) projekcije $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektora $\overrightarrow{AB}$ na osi l je:

$$\text{pr}_{\vec{l_0}}\overrightarrow{AB} = \pm\,|\overrightarrow{A_1B_1}|, \text{ gdje je } \vec{l_0} \text{ ort ose } l.$$

Ako je projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu l normalna, onda je njena simbolička oznaka:

$$\text{pr}_{\vec{l_0}}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi, \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

gdje je $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{AB}, \vec{l_0})$. Prema tome, projekcija vektora na osu (ili vektor) jednaka je proizvodu modula vektora i kosinusa ugla između vektora i ose.

Projekcija vektora na osu ima sljedeća važna svojstva:

1) Projekcija zbira dva (ili konačnog broja) vektora na proizvoljnu osu (ili vektor) jednaka je zbiru projekcija tih vektora, na tu osu, tj.

$$\text{pr}_{\vec{l_0}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n) = \text{pr}_{\vec{l_0}}\vec{a}_1 + \text{pr}_{\vec{l_0}}\vec{a}_2 + \cdots + \text{pr}_{\vec{l_0}}\vec{a}_n,$$

gdje je $\vec{l_0}$ ort te ose.

2) Projekcija vektora $\lambda\vec{a}$ na proizvoljnu osu jednaka je proizvodu projekcije vektora $\vec{a}$ na tu osu i skalara λ, tj.:

$$\text{pr}_{\vec{l_0}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\text{pr}_{\vec{l_0}}\vec{a}.$$

7.5. Razlaganje vektora na komponente

U teoriji i primjenama vektorskog računa dolazi se često u situaciju kada je potrebno posmatrani vektor predstaviti u vidu zbira dva, tri ili više vektora, koji se zovu *komponente* posmatranog vektora. Kaže se da je posmatrani vektor razložen na komponente. Operacija kojom se dolazi do komponenata zove se *razlaganje vektora*.

U opštem slučaju posmatrani vektor se može razlagati na svoje komponente na beskonačno mnogo načina. Da bi zadatak razlaganja vektora bio određen, neophodno je da budu unaprijed dati izvjesni podaci o komponentama vektora.

Razmotrićemo razlaganje datog vektora po pravcima dva vektora sa kojima leže u istoj ravni, kao i razlaganje po pravcima tri vektora koji ne leže u istoj ravni.

Za tri vektora kažemo da su *komplanarni* ako leže u istoj ravni ili se paralelnim pomjeranjem mogu dovesti u istu ravan. Pošto je riječ o slobodnim vektorima može se uvijek smatrati da komplanarni vektori imaju zajednički početak.

Neka su data tri komplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{r}$ i pri tome vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni (sl. 11).

Razmotrićemo razlaganje vektora $\vec{r}$ po pravcima vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Imamo da je $OB \parallel AC$ i $OA \parallel BC$, pa je:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

Kako je:

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$$

i

$$\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \beta\vec{b},$$

gdje su α i β realni brojevi, to je:

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Ova relacija jednoznačno definiše razlaganje vektora $\vec{r}$ po nekolinearnim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jer su brojevi α i β jednoznačno određeni.

Vektor $\overrightarrow{OA}$ je komponenta vektora $\vec{r}$ u pravcu vektora $\vec{a}$, a vektor $\overrightarrow{OB}$ je komponenta vektora $\vec{r}$ u pravcu vektora $\vec{b}$. Brojevi α i β se zovu *koeficijenti razlaganja* vektora $\vec{r}$ po vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Neka su data četiri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{r}$, i pri tome neka su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nekomplanarni (sl. 12). Razmotrićemo razlaganje vektora $\vec{r}$ po vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Imamo:

$$BD \parallel OA, \quad AD \parallel OB, \quad DM \parallel OC$$

pa je očigledno

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM}.$$

Kako je:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}, \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OC}$$

i

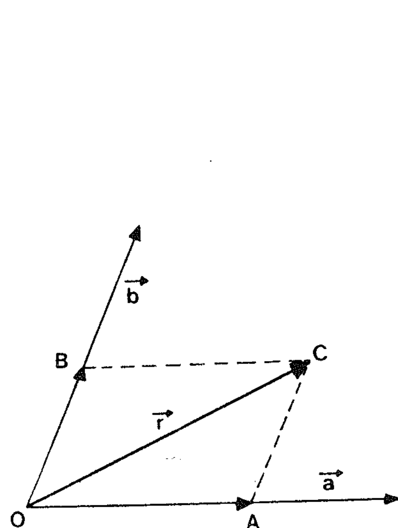
$$\overrightarrow{OA} = \alpha \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \beta \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \gamma \vec{c},$$

gdje su α, β i γ realni brojevi, to je:

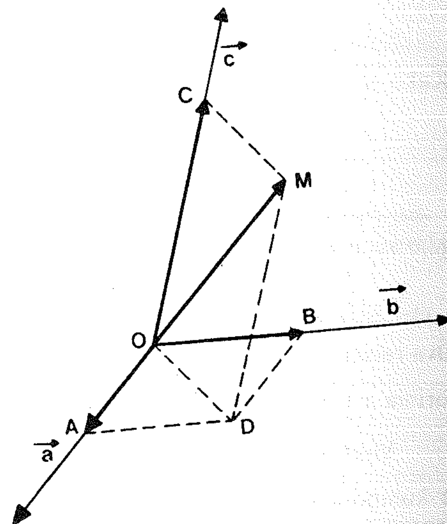
$$\vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Ova relacija definiše razlaganje vektora $\vec{r}$ po nekomplanarnim vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jer se lako može dokazati da postoji jedna jedina trojka brojeva α, β i γ, takva da je:

$$\vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$



Sl. 11.

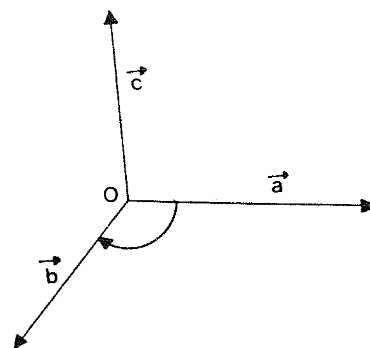


Sl. 12.

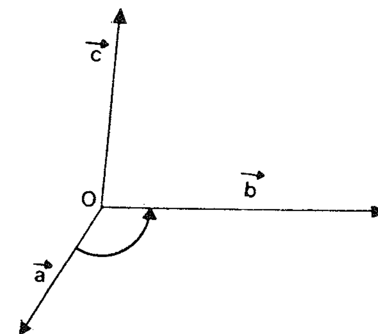
Vektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ su komponente vektora $\vec{r}$ po pravcima vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Brojevi α, β i γ su *koeficijenti razlaganja vektora* $\vec{r}$ po vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

7.6. Vektori u koordinatnom sistemu

Uočimo određenu trojku nekomplaminarnih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ sa zajedničkim početkom u tački O, gdje je $\vec{a}$ prvi, $\vec{b}$ drugi i $\vec{c}$ treći vektor (sl. 13). Ta trojka vektora zove se kratko *triedar* vektora. Kada su ta tri vektora uzajamno normalni, triedar je *ortogonalni* ili *pravougli*.



Sl. 13.



Sl. 14

Kod formiranja triedra uvodi se pojam *orijentisanog* triedra. Za triedar se kaže da je *desne orijentacije* ili *desni triedar*, ako su vektori koji ga obrazuju uređeni tako da se rotacija vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ oko vektora $\vec{c}$ vrši u direktnom smjeru, tj., smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. *Lijevo orijentisani triedar*, ili *lijevi triedar*, biće takav triedar kod koga je rotacija vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ oko vektora $\vec{c}$ izvršena u indirektnom smjeru, tj. smjeru kretanja kazaljki na satu. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ uzeti po tom redu obrazuju na sl. 13. desni, a na slici 14. lijevi triedar. Triedar ose, koje su brojne ose, i uzajamno su normalne, nazivaju se *Dekartov pravougli koordinatni sistem u prostoru*. Tačka presjeka tih osa O je koordinatni početak, ose su OX, OY i OZ i na njima korespodentni jedinični vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (sl. 15).

Položaj proizvoljne tačke M u prostoru određen je vektorom položaja $\overrightarrow{OM}$ koji se može predstaviti kao zbir vektora kolinearnih sa $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ (sl. 15). Ti vektori su komponente vektora $\overrightarrow{OM}$ u pravcu koordinatnih osa. Pošto su M_1, M_2 i M_3 ortogonalne projekcije tačke M na koordinate ose, onda je kao što se vidi na slici 15:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

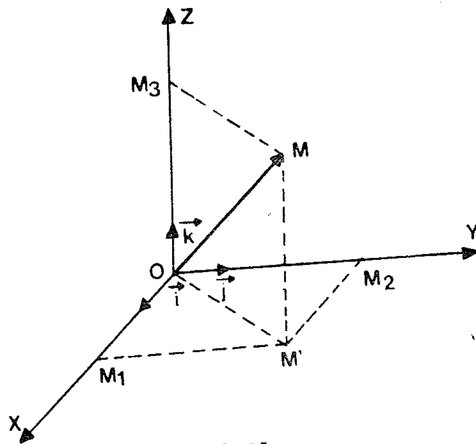
jer je:

$$\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{OM_2} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM_3},$$

te je:

$$\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$$

gdje su x, y i z tri realna broja koja potpuno određuju položaj tačke M, ili pravougle koordinate vektora $\overrightarrow{OM}$. Koordinata x je apscisa tačke M, y je njena ordinata i z njena kota.



Sl. 15.

Prema tome, vektor $\overrightarrow{OM}$, možemo napisati pomoću pravouglih koordinata u obliku:

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

a njegov intenzitet je:

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Vektor $\overrightarrow{OM}$ zove se *vektor položaja* tačke M s obzirom na tačku O. Na ovaj način određenom trojkom od tri broja x, y i z jednoznačno je određen vektor $\overrightarrow{OM}$, čiji je početak u koordinatnom početku, a kraj u tački sa koordinatama x, y i z, kao i obratno. Zbog takve obostrane jednoznačne veze između vektora položaja i tačke u prostoru Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema i njenih koordinata, uvodi se obilježavanje:

$$\overrightarrow{OM}=\{x,\ y,\ z\} \text{ ili samo } \overrightarrow{OM}\{x,\ y,\ z\}.$$

Ako se vektor $\overrightarrow{OM}$ projektuje ortogonalno na koordinatne ose biće:

$$x=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,\quad y=|\overrightarrow{OM}|\cos\beta,\quad z=|\overrightarrow{OM}|\cos\gamma,$$

gdje su α, β i γ uglovi što ga vektor $\overrightarrow{OM}$ gradi sa korespodentnim osama. Kvadriranjem i sabiranjem prednjih jednakosti, i uzimajući u obzir da je $|\overrightarrow{OM}|^2=x^2+y^2+z^2$, dobiće se da je:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Za dva vektora data svojim koordinatama:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$$

$$\vec{b}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$$

kažemo da su *jednaki*, ako su im odgovarajuće koordinate jednake, tj.

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2.$$

7.7. Linearna zavisnost vektora

Linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ biće neki treći vektor

$$p\vec{a}+q\vec{b}, \qquad (1)$$

gdje su p i q proizvoljni skalari. Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su *linearno nezavisni* kada je linearna kombinacija (1) različita od nule. U protivnom, kada postoje takva dva broja $p=\alpha$ i $q=\beta$, koja nisu istovremeno jednaka nuli, da je:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0, \qquad (2)$$

za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su *linearno zavisni*. U tom slučaju je:

$$\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b},\ \alpha\neq 0 \text{ odnosno } \vec{a}=\lambda\vec{b} \text{ za } \lambda=-\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha\neq 0.$$

Ova činjenica, da se jedan vektor izražava preko drugog, kazuje da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti pravac. Prema tome, dva linearno zavisna vektora uvijek su kolinearna.

Za dva vektora, različita od nula-vektora, data svojim koordinatama $\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ i $\vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$, kažemo da su kolinearni ako je:

$$\vec{a}=\lambda\vec{b},$$

tj.

$$x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}=\lambda(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

tj.

$$x_1=\lambda x_2,\ y_1=\lambda y_2,\ z_1=\lambda z_2$$

ili

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Prema tome, ako su dva vektora *kolinearna*, onda su njihove korespondentne koordinate proporcionalne.

Linearna kombinacija tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ biće vektor oblika:

$$p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}, \quad (3)$$

gdje su p, q i r proizvoljni skalari. Ako postoje takva tri skalara $p=\alpha$, $q=\beta$ i $r=\gamma$, koja istovremeno nisu jednaka nuli, a ta je linearna kombinacija jednaka nuli, onda se za ta tri vektora kaže da su *linearno zavisna*. U tom slučaju je:

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0, \quad (4)$$

pa se jedan vektor može izraziti pomoću druga dva tako da je:

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$$

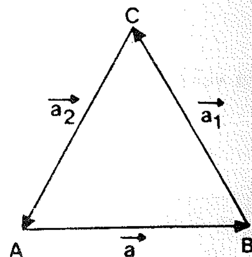
gdje je, radi jednostavnijeg pisanja, uvedeno da je $\lambda=-\frac{\beta}{\alpha}$ i $\mu=-\frac{\gamma}{\alpha}$, ($\alpha\neq 0$). Kako ova tri vektora $\vec{a}$, $\lambda\vec{b}$ i $\mu\vec{c}$ obrazuju trougao, to se za njih kaže da su komplanarni jer leže u jednoj ravni. Prema tome, ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni, jedan od njih se može razložiti na komponente u pravcu druga dva.

Četiri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ u trodimenzionalnom prostoru su uvijek linearno zavisna.

606.

Ako strane jednakostranog trougla uzmemo za vektore, da li su ti vektori međusobno jednaki?

Rješenje. Nisu, jer iako vektori strana imaju jednake intenzitete, oni nemaju isti pravac i smjer, pa nije ispunjen uslov jednakosti vektora (sl. 16).



Sl. 16.

607.

Dokazati da iz relacije $\vec{a}=\vec{b}$ i $\vec{b}=\vec{c}$ slijedi da je $\vec{a}=\vec{c}$, dok iz relacije $\vec{a}=\vec{b}$ i $\vec{b}\neq\vec{c}$ slijedi da je $\vec{a}\neq\vec{c}$.

Rješenje. Ako je $\vec{a}=\vec{b}$, to znači da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti intenzitet, pravac i smjer. Ako je, pak, $\vec{b}=\vec{c}$, to znači da i oni imaju isti intenzitet, pravac i smjer, pa odatle proizilazi da i vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ ispunjavaju ova tri uslova, pa je $\vec{a}=\vec{c}$.

Ako je $\vec{a}=\vec{b}$, to znači da zadovoljavaju sva tri uslova za jednakost dva vektora. Iz $\vec{b}\neq\vec{c}$ slijedi da vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ne zadovoljavaju bar jedan od potrebna tri uslova za jednakost vektora, pa prema tome, ni vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ nemaju sve uslove potrebne za jednakost, pa su različiti, tj. $\vec{a}\neq\vec{c}$.

608.

Kakav uslov treba da zadovolje vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ da bi se od njih mogao sastaviti trougao, ako se početak svakog vektora poklapa sa krajem jednog od dvaju drugih vektora?

Rješenje. Potreban i dovoljan uslov je da bude $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

609.

Dokazati da je:

a) $\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3}+\overrightarrow{M_3M_1}=0$,

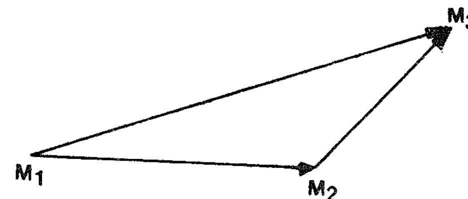
b) $\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3}+\overrightarrow{M_3M_4}+\dots+\overrightarrow{M_nM_1}=0$.

Rješenje.

a) Kako je: $\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3}=\overrightarrow{M_1M_3}$

i $\overrightarrow{M_1M_3}+\overrightarrow{M_3M_1}=0$,

što je očigledno sa (sl. 17), to zamjenom u (a) dobijamo:



Sl. 17.

$$\underbrace{\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3}}_{\overrightarrow{M_1M_3}}+\overrightarrow{M_3M_1}=\overrightarrow{M_1M_3}+\overrightarrow{M_3M_1}=0.$$

Dakle, zbir od tri vektora je jednak nuli ako oni čine trougao.

b) Kako je:

$$\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3}+\overrightarrow{M_3M_4}+\dots+\overrightarrow{M_{n-1}M_n}=\overrightarrow{M_1M_n}$$

i $\overrightarrow{M_1M_n}=-\overrightarrow{M_nM_1}$

to dobijamo da je:

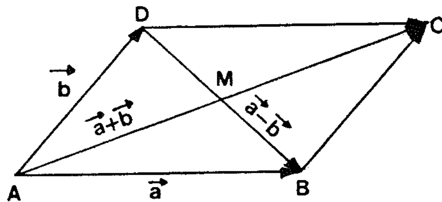
$$\underbrace{\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3}+\overrightarrow{M_3M_4}+\dots+\overrightarrow{M_{n-1}M_n}}_{\overrightarrow{M_1M_n}}+\overrightarrow{M_nM_1}=\overrightarrow{M_1M_n}+\overrightarrow{M_nM_1}=0.$$

Iz prednjeg dokaza proizilazi da je zbir od n vektora jednak nuli, ako oni čine zatvorenu poligonalnu liniju.

610.

U paralelogramu $ABCD$ strane su vektori i to: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Izraziti pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektore $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$, gdje je tačka M sjecište dijagonala.

Rješenje. Služeći se slikom 18 imamo da je:



Sl. 18.

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

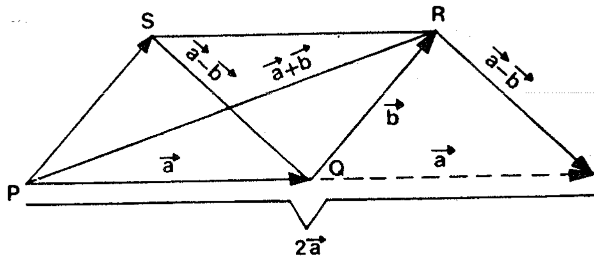
$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{1}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{1}{2}(b-a).$$

611.

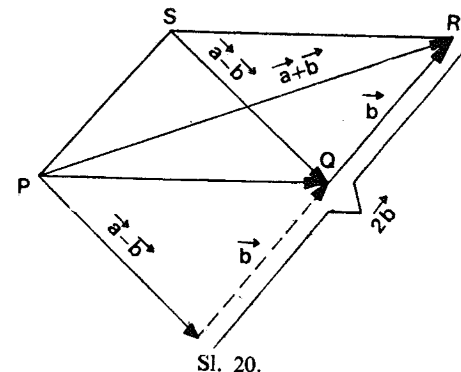
Koristeći paralelogram određen vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstruktivno provjeriti tačnost jednakosti (rješenje dato crtežom):

1) $(\vec{a}+b)+(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}$



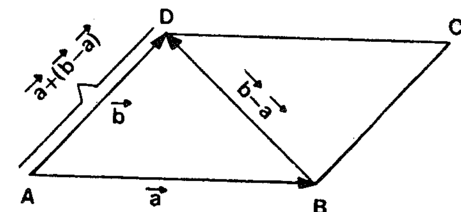
Sl. 19.

2. $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{b}$



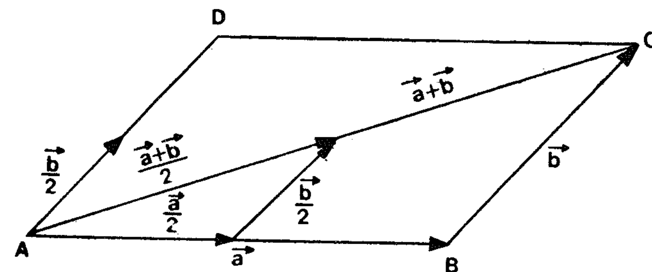
Sl. 20.

3) $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}$



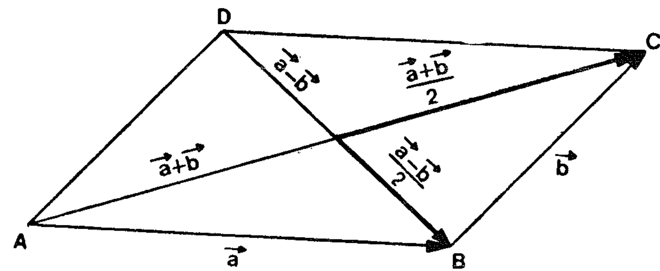
Sl. 21.

4) $\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$



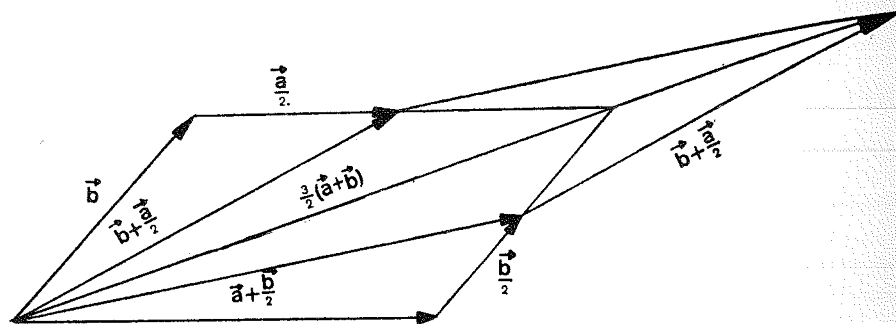
Sl. 22.

5) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$



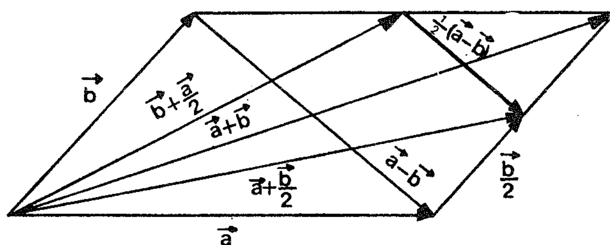
Sl. 23.

6) $\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\right)+\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}\right)=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b})$



Sl. 24.

7) $\left(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\right)-\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}\right)=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}).$



Sl. 25.

612.

U pravilnom šestouglu *ABCDEF* dati su $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ i $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$.

a) Izračunati pomoću $\vec{p}$ i $\vec{q}$ vektore $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AE}$.

b) Naći odnose: $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}}$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{EF}}$, $\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{AB}}$ i $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$.

Rješenje. Služeći se slikom (26) dobija se da je:

a) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=2\vec{q}-(\vec{p}+\vec{q})=\vec{q}-\vec{p},$

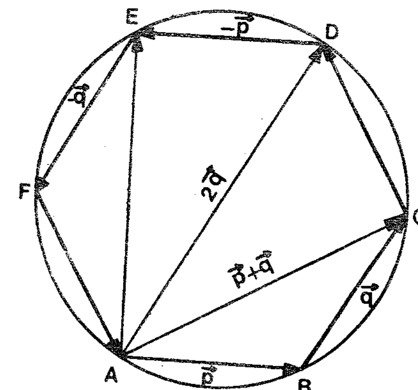
$\overrightarrow{DE}=-\vec{p},\ \overrightarrow{EF}=-\vec{q},$

$\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{CD}=-(\vec{q}-\vec{p})=\vec{p}-\vec{q},$

$\overrightarrow{AC}=\vec{p}+\vec{q},$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{q}-\vec{p}=2\vec{q},$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=2\vec{q}-\vec{p},$



Sl. 26

b) $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}}=\frac{\vec{q}}{2\vec{q}}=\frac{1}{2},$

$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{EF}}=\frac{\vec{q}}{-\vec{q}}=-1,$

$\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{-2\vec{p}}{\vec{p}}=-2,$

$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$, ovaj odnos nema smisla jer vektori nisu kolinearni.

613.

U pravilnom šestouglu *ABCDEF* dati su vektori $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ i $\overrightarrow{AE}=\vec{n}$. Razložiti pomoću ta dva vektora, vektore $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{EF}$ (sl. 27).

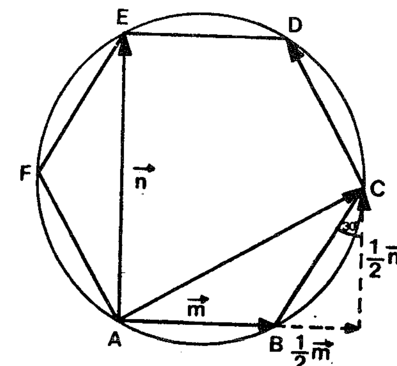
Rješenje.

$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}$

$\overrightarrow{AD}=\vec{m}+\vec{n}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{\vec{n}}{2}-\frac{\vec{m}}{2}$

$\overrightarrow{EF}=-\frac{\vec{n}}{2}-\frac{\vec{m}}{2}$



Sl. 27.

614.

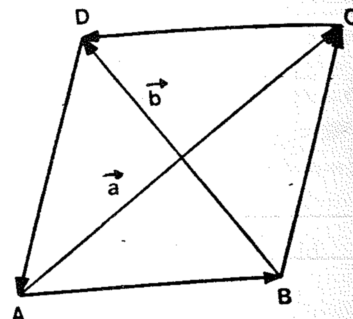
U rombu *ABCD* date su dijagonale $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Izračunati pomoću ova dva vektora sve vektore koji se poklapaju sa stranama romba.

23*

Rješenje. Sa slike (28) vidimo da je:

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\vec a}{2}-\frac{\vec b}{2},\quad \overrightarrow{CD}=-\frac{\vec a}{2}+\frac{\vec b}{2}$$

$$\overrightarrow{BC}=\frac{\vec b}{2}+\frac{\vec a}{2},\quad \overrightarrow{DA}=-\frac{\vec b}{2}-\frac{\vec a}{2}$$

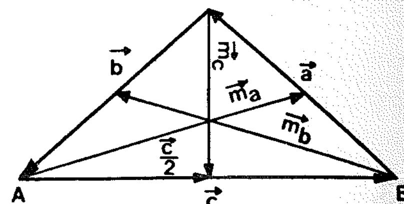


Sl. 28.

615.

Strane trougla su vektori $\vec a, \vec b, \vec c$. Pomoću ovih vektora izraziti težišne linije trougla (sl. 29).

Rješenje.



Sl. 29.

$$\vec m_c=\vec b+\frac{\vec c}{2}$$

$$\vec m_c=-\left(\frac{\vec c}{2}+\vec a\right)=-\frac{\vec c}{2}-\vec a,$$

$$\vec m_a=\vec c+\frac{\vec a}{2}$$

$$\vec m_a=-\left(\frac{\vec a}{2}+\vec b\right)=-\frac{\vec a}{2}-\vec b,$$

$$\vec m_b=\vec a+\frac{\vec b}{2},$$

$$\vec m_b=-\left(\frac{\vec b}{2}+\vec c\right)=-\frac{\vec b}{2}-\vec c.$$

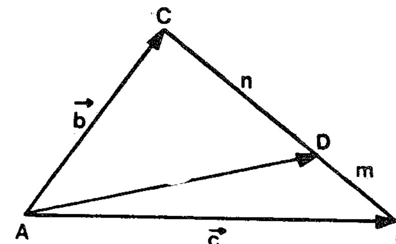
616.

U trouglu ABC strana BC podijeljena je tačkom D u odnosu $m:n$. Razložiti vektor $\overrightarrow{AD}$ po pravcima vektora $\overrightarrow{AB}=\vec c$ i $\overrightarrow{AC}=\vec b$ (sl. 30).

Rješenje. $\overrightarrow{AD}=\vec c+\overrightarrow{BD}$

Iz odnosa $\dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\dfrac{m}{n}$ slijedi da je $\overrightarrow{BD}=\dfrac{m}{n}\overrightarrow{DC}=\dfrac{m}{n}(\vec b-\overrightarrow{AD})$.

Prema tome je:



Sl. 30.

$$\overrightarrow{AD}=\vec c+\frac{m}{n}(\vec b-\overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AD}=\vec c+\frac{m}{n}\vec b-\frac{m}{n}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AD}+\frac{m}{n}\overrightarrow{AD}=\vec c+\frac{m}{n}\vec b$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\overrightarrow{AD}=\vec c+\frac{m}{n}\vec b$$

$$\frac{n+m}{n}\overrightarrow{AD}=\frac{n\vec c+m\vec b}{n}$$

$$(m+n)\overrightarrow{AD}=n\vec c+m\vec b$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\vec b+\frac{n}{m+n}\vec c.$$

617.

Razložiti vektor $\vec a$ u pravcu vektora $\vec b$ i $\vec c$, ako je:

$$\vec a=3\vec p-2\vec q,\ \vec b=-2\vec p+\vec q,\ \vec c=7\vec p-4\vec q.$$

Rješenje. Razložen vektor $\vec a$ u pravcu vektora $\vec b$ i $\vec c$ glasi:

$$\vec a=\lambda\vec b+\mu\vec c,$$

gdje su λ i μ realni parametri koje treba odrediti.

$$3\vec p-2\vec q=\lambda(-2\vec p+\vec q)+\mu(7\vec p-4\vec q)$$

$$3\vec p-2\vec q=(7\mu-2\lambda)\vec p+(\lambda-4\mu)\vec q.$$

Da bi data relacija bila identički zadovoljena, potrebno je da odgovarajući koeficijenti budu jednaki, tj.

$$7\mu-2\lambda=3$$

$$\lambda-4\mu=-2.$$

Rješavanjem dobijenog sistema jednačina, dobijamo da je: $\lambda=2$ i $\mu=1$, pa razložen vektor $\vec a$ u pravcu vektora $\vec b$ i $\vec c$ glasi:

$$\vec a=2\vec b+\vec c.$$

618.

Pomoću vektora dokazati da se dijagonale paralelograma uzajamno polove (sl. 31).

Rješenje.

$$\vec{AM}+\vec{MB}=\vec{a} \qquad (1)$$

Međutim, vektor $\vec{AM}$ je kolinearan sa vektorom $\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, a vektor $\vec{MB}$ kolinearan sa vektorom $\vec{DB}$, te je:

$$\vec{AM}=\lambda(\vec{a}+\vec{b})$$
$$MB=\mu(\vec{a}-\vec{b}). \qquad (2)$$

Zamjenom relacija (2) u relaciju (1) dobija se da je:

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})+\mu(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$$

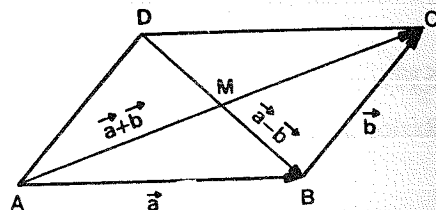
$$(\lambda-\mu)\vec{b}=(1-\lambda-\mu)\vec{a}.$$

Dobijena relacija će biti zadovoljena samo u slučaju kada je:

$$\lambda-\mu=0$$

$$1-\lambda-\mu=0,$$

tj. za $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$.



Sl. 31.

Prema tome je zaista:

$$\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\vec{MB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}).$$

619.

Razložiti vektor $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ u pravcu tri nekomplanarna vektora $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{p}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

Rješenje. Da bi vektor $\vec{s}$ razložili u pravcu vektora $\vec{m}$, $\vec{n}$ i $\vec{p}$, mora postojati linearna zavisnost:

$$\vec{s}=\lambda\vec{m}+\mu\vec{n}+\nu\vec{p},$$

tj.:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\lambda(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})+\mu(\vec{a}-\vec{b})+\nu(2\vec{b}+3\vec{c})$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\lambda+\mu)\vec{a}+(\lambda-\mu+2\nu)\vec{b}+(3\nu-2\lambda)\vec{c}$$

Dobijena relacija će biti identičnost ako je:

$$\lambda+\mu=1, \quad \lambda-\mu+2\nu=1, \quad 3\nu-2\lambda=1.$$

Iz dobijenog sistema jednačina proizilazi da je $\lambda=\frac{2}{5}$, $\mu=\frac{3}{5}$ i $\nu=\frac{3}{5}$, pa razložni vektor $\vec{s}$ na komponente u pravcu vektora $\vec{m}$, $\vec{n}$ i $\vec{p}$ glasi:

$$\vec{s}=\frac{2}{5}\vec{m}+\frac{3}{5}\vec{n}+\frac{3}{5}\vec{p}.$$

620.

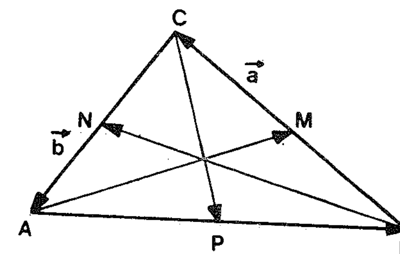
Pomoću strana $\vec{BC}=\vec{a}$ i $\vec{CA}=\vec{b}$ trougla ABC izračunati težišne linije $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ i $\vec{CP}$ i pokazati da je njihov zbir nula.

Rješenje.

$$\vec{AM}=-\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}$$

$$\vec{BN}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}$$

$$\vec{CP}=\vec{b}+\frac{\vec{AB}}{2}=\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

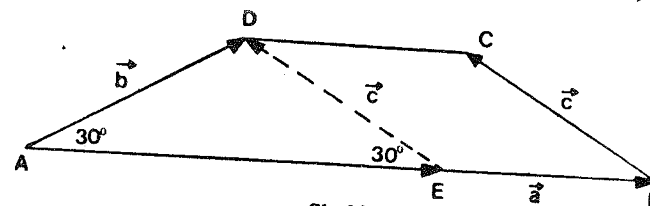


Sl. 32.

$$\vec{AM}+\vec{BN}+\vec{CP}=-\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}+\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}+\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=0.$$

621.

Data je osnovica $\vec{a}$, krak $\vec{b}$ i $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=30°$ jednakokrakog trapeza; izračunati drugi krak trapeza u zavisnosti od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sl. 33).



Sl. 33.

Rješenje. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}=\vec{c}$

$$\overrightarrow{AE}=|\vec{b}|\cdot 2\cos 30°\cdot \vec{a}_0=|\vec{b}|\cdot\sqrt{3}\,\vec{a}_0=|\vec{b}|\cdot\sqrt{3}\,\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Prema tome je:

$$\vec{c}=\vec{b}-\frac{|\vec{b}|\sqrt{3}}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

622.

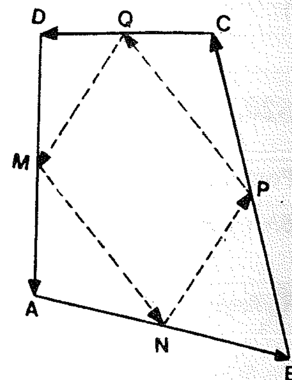
Pokazati pomoću vektora da se spajanjem sredina strana bilo kojeg četvorougla dobija paralelogram.

Rješenje. Sa slike 34 dobija se da je:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{CD},\ \vec{d}=\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2},\qquad \overrightarrow{NP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\qquad \overrightarrow{QM}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}.$$



Sl. 34.

S obzirom da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i $\vec{d}$ obrazuju zatvorenu liniju to je:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0 \qquad (1)$$

$$\vec{a}+\vec{d}=-(\vec{b}+\vec{c})/:2$$

$$\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}=-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{PQ}. \qquad (2)$$

Iz relacije (1) takođe slijedi da je:

$$\vec{a}+\vec{b}=-(\vec{c}+\vec{d})/:2$$

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=-\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$$

$$\overrightarrow{NP}=-\overrightarrow{QM}. \qquad (3)$$

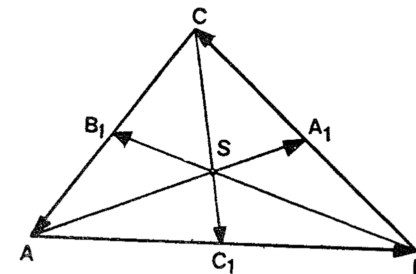
Relacije (2) i (3) pokazuju da su kod figure $MNPQ$ po dvije suprotne strane kolinearne, pa je dobijena figura $MNPQ$ paralelogram.

623.

Primjenom vektora dokazati da se težišne linije trougla ABC sijeku u jednoj tački i da ta tačka dijeli težišne linije u razmjeri 2 : 1.

Rješenje.

Označimo sa S presjek težišnih linija AA_1 i BB_1 trougla ABC (sl. 35). Dokažimo da težišna linija CC_1 prolazi kroz presjek S.



Sl. 35.

Kako su vektori $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{AA_1}$, odnosno $\overrightarrow{BS}$ i $\overrightarrow{BB_1}$ međusobno kolinearni, to je:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AS}&=\lambda\,\overrightarrow{AA_1}\\ \overrightarrow{BS}&=\mu\,\overrightarrow{BB_1}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Pošto je:

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}, \qquad (2)$$

to iz (1) i (2) dobijamo da je:

$$\lambda\,\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\mu\,\overrightarrow{BB_1}. \qquad (3)$$

Kako je dalje:

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

i

$$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}),$$

jer je:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0,\ \text{odakle je}\ \overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}.$$

Prema tome, jednakost (3) postaje:

$$\left(\lambda+\frac{\mu}{2}-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\overrightarrow{BC}=0 \qquad (4)$$

Pošto su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ linearno nezavisni, jer nisu kolimerni, to iz (4) slijedi da je:

$$\lambda+\frac{\mu}{2}-1=0 \quad \text{i} \quad \frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}=0,$$

odakle je:

$$\lambda=\frac{2}{3} \quad \text{i} \quad \mu=\frac{2}{3}.$$

Smjenom ovih vrijednosti u (1) dobijamo da je:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AS}&=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AA_1}\\ \overrightarrow{BS}&=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{BB_1}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

S obzirom na (5) imamo da je:

$$\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}\,\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\,(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC_1})=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{CC_1}.$$

Dakle,

$$\overrightarrow{CS}=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{CC_1}. \qquad (6)$$

Iz jednakosti (6) slijedi da su vektori $\overrightarrow{CS}$ i $\overrightarrow{CC_1}$ kolinearni, što znači da težišna linija CC_1 prolazi kroz presjek S težišnih linija AA_1 i BB_1. Dakle, težišne linije trougla sijeku se u jednoj tački.

Međutim, iz relacije (5) i (6) proizilazi da presječna tačka S težišnih linija trougla dijeli te težišne linije u razmjeri 2 : 1.

624.

Odrediti dužinu vektora položaja težišta trougla, ako su vrhovi trougla dati svojim vektorima položaja (sl. 36).

Rješenje. Strane trougla izražene preko radijus vektora glase:

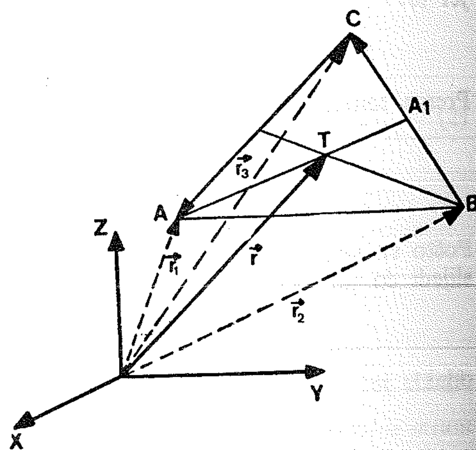
$$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$$

$$\overrightarrow{BC}=\vec{r}_3-\vec{r}_2$$

$$\overrightarrow{CA}=\vec{r}_1-\vec{r}_3.$$

Vektor položaja težišta T je:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OT}=\vec{r}_1+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=$$



Sl. 36.

$$=\vec{r}_1+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}\right)=\vec{r}_1+\frac{2}{3}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1+\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\vec{r}_1+\frac{1}{3}\vec{r}_2+\frac{1}{3}\vec{r}_3,$$

tj.:

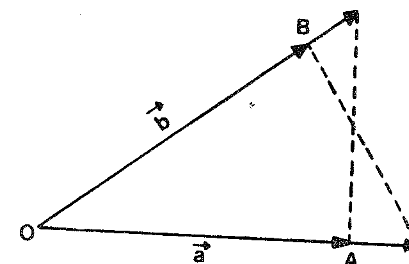
$$r=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3}.$$

7.8. Skalarni proizvod dva vektora

Uzmimo dva slobodna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedena na zajednički početak 0 (sl. 37).

Pod skalarnim, ili unutrašnjim proizvodom vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u oznaci $\vec{a}\cdot\vec{b}$, podrazumijevamo skalar jednak proizvodu intenziteta tih vektora i kosinusa ugla između vektora, tj.:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\ \vec{b}).$$



Sl. 37.

Vektor $\vec{a}$ možemo ortogonalno projicirati na pravac vektora $\vec{b}$, a isto tako i vektor $\vec{b}$ na pravac vektora $\vec{a}$ (sl. 37). Vektor $\overrightarrow{OA}$ je unutrašnja komponenta vektora $\vec{a}$ na vektoru $\vec{b}$, a $\overrightarrow{OB}$ je unutrašnja komponenta vektora $\vec{b}$ na vektoru $\vec{a}$. Zato se često skalarni proizvod dva vektora zove *unutrašnji proizvod.*

Projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ data je obrascem:

$$\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\ \mathrm{co}\ \ (\vec{a},\ \vec{b})$$

i projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ obrascem:

$$\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{b}=|\vec{b}|\cos\,(\vec{b},\ \vec{a}).$$

Kako je $\cos\,(\vec{a},\ \vec{b})=\cos\,(\vec{b},\ \vec{a})$, to skalarni proizvod možemo pisati i u obliku:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\ \mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{b}\quad \text{ili}\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\ \mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a},$$

tj. skalarni proizvod dva vektora jednak je proizvodu intenziteta jednog vektora i projekcije drugog vektora na pravac prvog.

Iz definicione relacije za skalarni proizvod dva vektora neposredno slijedi obrazac za izračunavanje ugla, odnosno kosinusa ugla između dva vektora:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

Skalarni proizvod biće pozitivan ako je $\cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0$, a negativan ako je $\cos(\vec{a}, \vec{b}) < 0$.

Skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ biće jednak nuli kada je ili $\vec{a} = 0$, ili $\vec{b} = 0$ ili $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Ovo znači da će skalarni proizvod biti nula onda, i samo onda, ako je bar jedan od vektora nula-vektor, ili ako su vektori ortogonalni jedan na drugom. Vidimo, dakle, da skalarni proizvod može biti nula i onda kada ni jedan od vektora nije nula-vektor i da se jednakost:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

može uzeti kao uslov normalnosti dva vektora od kojih ni jedan nije nula-vektor.

Skalarni proizvod dva vektora ima još i sljedeće osobine:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — komutativnost

b) $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$ — asocijativnost

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — distributivnost

d) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

e) $\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0 = |\vec{a}_0|^2 = 1$

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati svojim koordinatama u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu,

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k},$$

tada je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

odnosno:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

jer je:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

i

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

Prema tome, možemo reći:

Da bi dva vektora, od kojih nije ni jedan nula-vektor, bili uzajamno normalni, potrebno je i dovoljno da zbir proizvoda njihovih istoimenih koordinata bude jednak nuli, tj. da bude:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Kako je:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

i

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},$$

to je:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

obrazac za izračunavanje kosinusa ugla između dva vektora, izražena koordinatama vektora.

625.

Izračunati skalarni proizvod vektora $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, gdje su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ uzajamno normalni ortovi.

Rješenje. Ako su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ uzajamno normalni ortovi, onda je $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ i $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, pa je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} + 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} + 4\vec{q}) = 3|\vec{p}|^2 - 2\vec{q} \cdot \vec{p} + 12\vec{p} \cdot \vec{q} + 8|\vec{q}|^2 = 3 + 8 = 11.$$

626.

Izračunati intenzitet vektora $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ uzajamno normalni ortovi.

Rješenje. $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (3\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot (3\vec{m} - 4\vec{n}) = 9|\vec{m}|^2 - 12\vec{n} \cdot \vec{m} - 12\vec{m} \cdot \vec{n} + 16|\vec{n}|^2 = 9 + 16 = 25$

$$|\vec{a}| = \sqrt{25} = 5.$$

627.

Naći brojnu vrijednost skalara: $3|\vec{m}| - 2\vec{m} \cdot \vec{n} + 4|\vec{n}|^2$, ako je: $|\vec{m}| = \frac{1}{3}$, $|\vec{n}| = 6$ i $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje.

$$3|\vec m|-2\vec m\cdot\vec n+4|\vec n|^2=3|\vec m|-2|\vec m||\vec n|\cos(\vec m,\vec n)+4|\vec n|^2=$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot 6\cos\frac{\pi}{3}+4\cdot 6^2=143.$$

628.

Naći brojnu vrijednost izraza: $|\vec a|^2+3\vec a\cdot\vec b-2\vec b\cdot\vec c+1$, ako je:

$$\vec a=4\vec m-\vec n,\quad \vec b=\vec m+2\vec n\quad \text{i}\quad \vec c=2\vec m-3\vec n,$$

gdje je:

$$|\vec m|^2=4,\quad |\vec n|^2=1\quad \text{i}\quad \sphericalangle(\vec m,\vec n)=\frac{\pi}{2}.$$

Rješenje. Pošto je $\sphericalangle(\vec m,\vec n)=\frac{\pi}{2}$ to slijedi da je $\vec m\cdot\vec n=0$, pa će biti:

$$|\vec a|^2=\vec a\cdot\vec a=(4\vec m-\vec n)(4\vec m-\vec n)=16|\vec m|^2-8\vec m\cdot\vec n+|\vec n|^2=65$$

$$\vec a\cdot\vec b=(4\vec m-\vec n)(\vec m+2\vec n)=4|\vec m|^2+7\vec m\cdot\vec n-2|\vec n|^2=14$$

$$\vec b\cdot\vec c=(\vec m+2\vec n)(2\vec m-3\vec n)=2|\vec m|^2+\vec m\cdot\vec n-6|\vec n|^2=2.$$

Prema tome imamo da je:

$$|\vec a|^2+3\vec a\cdot\vec b-2\vec b\cdot\vec c+1=65+3\cdot 14-2\cdot 2+1=104.$$

629.

Naći intenzitet zbira vektora $\vec a$ i $\vec b$, ako je $|\vec a|=5$, $|\vec b|=3$ i $\sphericalangle(\vec a,\vec b)=\frac{\pi}{3}$.

Rješenje.

$$|\vec a+\vec b|^2=(\vec a+\vec b)(\vec a+\vec b)=|\vec a|^2+2\vec a\cdot\vec b+|\vec b|^2=$$

$$=|\vec a|^2+2|\vec a||\vec b|\cos(\vec a,\vec b)+|\vec b|^2=49,$$

tj.

$$|\vec a+\vec b|=\sqrt{49}=7.$$

630.

Izračunati dužine dijagonala paralelograma ako su mu strane vektori $\vec a=2\vec p+2\vec q$ i $\vec b=\vec p-3\vec q$, gdje je $|\vec p|=2\sqrt{2}$, $|\vec q|=3$ i $\sphericalangle(\vec p,\vec q)=\frac{\pi}{4}$.

Rješenje.

$$\vec d_1=\vec a+\vec b=3\vec p-\vec q$$

$$|\vec d_1|^2=(3\vec p-\vec q)(3\vec p-\vec q)=9|\vec p|^2-6|\vec p||\vec q|\cos(\vec p,\vec q)+|\vec q|^2=45,$$

tj.

$$|\vec d_1|=\sqrt{45}$$

$$\vec d_2=\vec a-\vec b=\vec p+5\vec q$$

$$|\vec d_2|^2=(\vec p+5\vec q)(\vec p+5\vec q)=|\vec p|+10|\vec p||\vec q|\cos(\vec p,\vec q)+$$

$$+25|\vec q|^2=293,$$

tj.

$$|\vec d_2|=\sqrt{293}.$$

631.

U jednoj tački dejstvuju sile $\vec P$ i $\vec Q$ pod uglom od 120° pri čemu su intenziteti sila $|\vec P|=7$, $|\vec Q|=4$. Izračunati intenzitet rezultujuće sile $\vec R$ (sl. 38).

Rješenje.

$$\vec R=\vec P+\vec Q$$

$$|\vec R|^2=(\vec P+\vec Q)(\vec P+\vec Q)=|\vec P|^2+2\vec P\cdot\vec Q+|\vec Q|^2=$$

$$=|\vec P|^2+2|\vec P||\vec Q|\cos 120°+|\vec Q|^2=37,$$

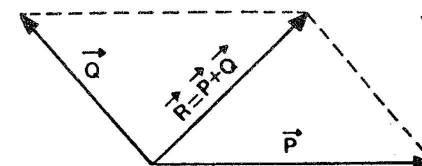
gdje smo koristili relaciju:

$$\cos 120°=\cos(90°+30°)=$$

$$-\sin 30°=-\frac{1}{2},$$

pa je traženi intenzitet

$$|\vec R|=\sqrt{37}.$$



Sl. 38.

632.

Odrediti ugao kojeg zahvataju vektori $\vec a=3\vec p+2\vec q$ i $\vec b=\vec p+5\vec q$, gdje su $\vec p$ i $\vec q$ uzajamno normalni ortovi.

Rješenje. Iz relacije:

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos(\vec a,\vec b)$$

slijedi da je:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

Pošto je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} + 2\vec{q})(\vec{p} + 5\vec{q}) = 3|\vec{p}|^2 + 15\vec{p} \cdot \vec{q} + 2\vec{q} \cdot \vec{p} + 10|\vec{q}|^2 = 13$$

$$|\vec{a}|^2 = (3\vec{p} + 2\vec{q})^2 = 9|\vec{p}|^2 + 12\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = 13$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}|^2 = (\vec{p} + 5\vec{q})^2 = |\vec{p}|^2 + 10\vec{p} \cdot \vec{q} + 25|\vec{q}|^2 = 26$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{26},$$

to imamo da je:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tj.

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}.$$

633.

Odrediti skalar λ tako da vektori $\vec{p} = \lambda\vec{a} + 17\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ budu uzajamno normalni, ako je: $|\vec{a}| = 2$,

$$|\vec{b}| = 5 \quad \text{i} \quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Rješenje.

Da bi vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ bili uzajamno normalni, treba da je:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$$

tj.

$$(\lambda\vec{a} + 17\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$3\lambda|\vec{a}|^2 + (51 - \lambda)\vec{a} \cdot \vec{b} - 17|\vec{b}|^2 = 0$$

$$12\lambda + (51 - \lambda) \cdot 10\cos\frac{2\pi}{3} - 425 = 0$$

$$\lambda = 40.$$

634.

Izračunati $|\vec{a} - \vec{b}|$, ako je $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ i $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$.

Rješenje. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 =$

$$= 530 + 494\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{530 + 494\cos(\vec{a}, \vec{b})}$$

$$\sqrt{530 + 494\cos(\vec{a}, \vec{b})} = 24$$

$$530 + 494\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 576$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{23}{247}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 484$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{484} = 22.$$

635.

Dati su vektori:

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \quad \vec{b} = 7\vec{p} - 5\vec{q}, \quad \vec{c} = \vec{p} - 4\vec{q} \quad \text{i} \quad \vec{d} = 7\vec{p} - 2\vec{q}.$$

Odrediti ugao između vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ ako je : $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{c} \perp \vec{d}$.

Rješenje. Iz uslova $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{c} \perp \vec{d}$ slijedi da su njihovi skalarni proizvodi jednaki nuli, tj.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{i} \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 0,$$

odnosno

$$(\vec{p} + 3\vec{q})(7\vec{p} - 5\vec{q}) = 0$$

$$(\vec{p} - 4\vec{q})(7\vec{p} - 2\vec{q}) = 0,$$

tj.

$$7|\vec{p}|^2 + 16|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos(\vec{p}, \vec{q}) - 15|\vec{q}|^2 = 0 \qquad (1)$$

$$7|\vec{p}|^2 - 30|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos(\vec{p}, \vec{q}) + 8|\vec{q}|^2 = 0. \qquad (2)$$

Oduzimanjem (2) od (1) dobija se:

$$46|\vec{p}||\vec{q}|\cos(\vec{p},\vec{q})-23|\vec{q}|^2=0$$

$$\cos(\vec{p},\vec{q})=\frac{|\vec{q}|}{2|\vec{p}|}. \qquad (3)$$

Smjenom (3) u (1) dobija se:

$$7|\vec{p}|^2+16|\vec{p}||\vec{q}|\cdot\frac{|\vec{q}|}{2|\vec{p}|}-15|\vec{q}|^2=0.$$

$$|\vec{p}|^2=|\vec{q}|^2$$

$$|\vec{p}|=|\vec{q}| \qquad (4)$$

Smjenom relacije (4) u relaciju (3) dobićemo da je:

$$\cos(\vec{p},\vec{q})=\frac{1}{2},$$

tj.

$$\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{3}.$$

636.

Tri sile $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ i $\vec{f_3}$ imaju istu napadnu tačku i uzajamno su normalne; izračunati intenzitet rezultante, ako je: $|\vec{f_1}|=2\,N$, $|\vec{f_2}|=10\,N$ i $|\vec{f_3}|=11\,N$.

Rješenje. Ako rezultujuću silu označimo sa $\vec{R}$ imaćemo da je:

$$\vec{R}=\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3},$$

tj.

$$|\vec{R}|^2=(\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3})^2=|\vec{f_1}|^2+|\vec{f_2}|^2+|\vec{f_3}|^2=225,$$

odnosno:

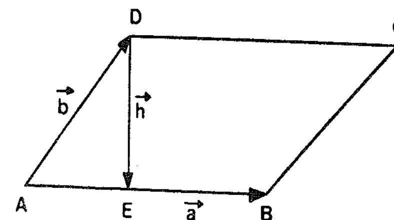
$$|\vec{R}|=\sqrt{225}=15N.$$

637.

Strane paralelograma $ABCD$ su $\vec{AB}=\vec{a}$ i $\vec{AD}=\vec{b}$; izraziti visinu koja odgovara strani $\vec{AB}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje. $\vec{DE}=\vec{AE}-\vec{AD}=\lambda\vec{AB}-\vec{AD}$ (1)

Pošto je (sl. 39):



Sl. 39.

$$\vec{DE}\perp\vec{AB}$$

to je

$$\vec{DE}\cdot\vec{AB}=0$$

$$(\lambda\vec{AB}-\vec{AB})\cdot\vec{AB}=0$$

$$\lambda|\vec{AB}|^2-\vec{AD}\cdot\vec{AB}=0$$

$$\lambda=\frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AB}|^2}. \qquad (2)$$

Zamjenom relacije (2) u (1) dobijamo traženu visinu:

$$\vec{DE}=\frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AB}|^2}\cdot\vec{AB}-\vec{AD},$$

odnosno:

$$\vec{h}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}-\vec{b}.$$

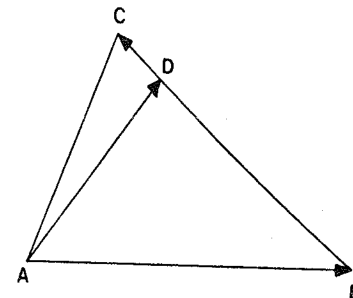
638.

Date su strane trougla ABC svojim vektorima $\vec{AB}=5\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{BC}=2\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{CA}=-7\vec{a}+2\vec{b}$. Izraziti visinu $\vec{AD}$ trougla pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ uzajamno normalni ortovi.

Rješenje.

$$\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AB}+\lambda\vec{BC} \qquad (1)$$

Pošto je (sl. 40) $\vec{AD}\perp\vec{BC}$, to je:



Sl. 40.

$$\vec{AD}\cdot\vec{BC}=0$$

$$(\vec{AB}+\lambda\vec{BC})\cdot\vec{BC}=0$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\lambda|\vec{BC}|^2=0.$$

24*

Oduzimanjem (2) od (1) dobija se:

$$46\,|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos(\vec{p},\ \vec{q})-23\,|\vec{q}|^2=0$$

$$\cos(\vec{p},\ \vec{q})=\frac{|\vec{q}|}{2\,|\vec{p}|}. \qquad (3)$$

Smjenom (3) u (1) dobija se:

$$7\,|\vec{p}|^2+16\,|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cdot\frac{|\vec{q}|}{2\,|\vec{p}|}-15\,|\vec{q}|^2=0.$$

$$|\vec{p}|^2=|\vec{q}|^2$$

$$|\vec{p}|\ =|\vec{q}| \qquad (4)$$

Smjenom relacije (4) u relaciju (3) dobićemo da je:

$$\cos(\vec{p},\ \vec{q})=\frac{1}{2},$$

tj.

$$\sphericalangle(\vec{p},\ \vec{q})=\frac{\pi}{3}.$$

636.

Tri sile $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ i $\vec{f_3}$ imaju istu napadnu tačku i uzajamno su normalne; izračunati intenzitet rezultante, ako je: $|\vec{f_1}|=2\ N$, $|\vec{f_2}|=10\ N$ i $|\vec{f_3}|=11\ N$.

Rješenje. Ako rezultujuću silu označimo sa $\vec{R}$ imaćemo da je:

$$\vec{R}=\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3},$$

tj.

$$|\vec{R}|^2=(\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3})^2=|\vec{f_1}|^2+|\vec{f_2}|^2+|\vec{f_3}|^2=225,$$

odnosno:

$$|\vec{R}|=\sqrt{225}=15N.$$

637.

Strane paralelograma $ABCD$ su $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$; izraziti visinu koja odgovara strani $\overrightarrow{AB}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\lambda\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ (1)

Pošto je (sl. 39):

$$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}$$

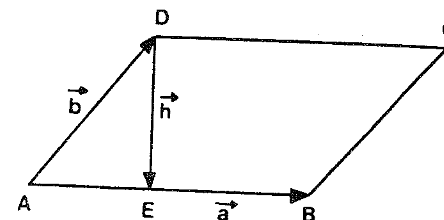
to je

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$(\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$\lambda|\overrightarrow{AB}|^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}. \qquad (2)$$



Sl. 39.

Zamjenom relacije (2) u (1) dobijamo traženu visinu:

$$\overrightarrow{DE}=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},$$

odnosno:

$$\vec{h}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}-\vec{b}.$$

638.

Date su strane trougla ABC svojim vektorima $\overrightarrow{AB}=5\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{a}-4\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=-7\vec{a}+2\vec{b}$. Izraziti visinu $\overrightarrow{AD}$ trougla pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ uzajamno normalni ortovi.

Rješenje.

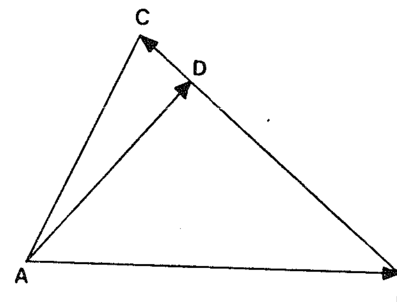
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\lambda\,\overrightarrow{BC} \qquad (1)$$

Pošto je (sl. 40) $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$, to je:

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$(\overrightarrow{AB}+\lambda\,\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\lambda\,|\overrightarrow{BC}|^2=0.$$



Sl. 40.

$$\lambda = -\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2} = -\frac{(5\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-4\vec{b})}{(2\vec{a}-4\vec{b})^2}.$$

$$\lambda = -\frac{1}{10}$$

Prema tome, tražena visina glasi:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC} = 5\vec{a}+2\vec{b}-\frac{1}{10}(2\vec{a}-4\vec{b}) = \frac{24}{5}\vec{a}+\frac{12}{5}\vec{b}.$$

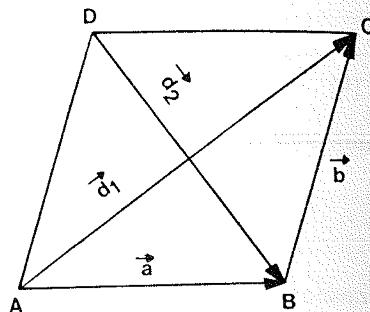
639.

Dokazati da su dijagonale romba uzajamno normalne.

Rješenje. Sa slike (41) vidi se da je:

$$\vec{d}_1 = \vec{a}+\vec{b}$$

$$\vec{d}_2 = \vec{a}-\vec{b}.$$



Sl. 41.

Pošto su kod romba sve strane jednake to je:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Dijagonale su normalne ako je:

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0.$$

Zaista,

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0.$$

640.

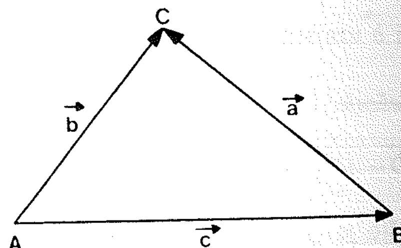
Izvesti kosinusnu i Pitagorinu teoremu.

Rješenje. Iz slike (42) slijedi:

$$\vec{a} = \vec{b}-\vec{c}$$

$$|\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{c})(\vec{b}-\vec{c})$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}).$$



Sl. 42.

Iz dobijene kosinusne teoreme neposredno slijedi Pitagorina teorema, ako je ugao koji zaklapaju vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ prav, pa je zbog toga $\cos\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 0$, tj.

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2.$$

641.

Izvesti sinusnu teoremu.

Rješenje. Sa slike (43) vidi se da je:

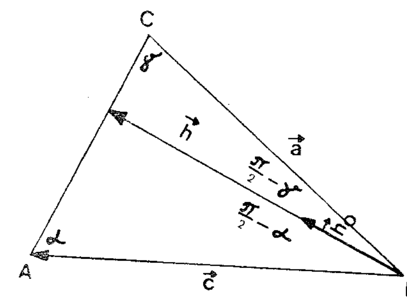
$$\text{pr}_{\vec{h}_0}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{h}_0) = |\vec{h}|,$$

odnosno:

$$\text{pr}_{\vec{h}_0}\vec{c} = |\vec{c}|\cos(\vec{c}, \vec{h}_0) = |\vec{h}|$$

$$|\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{h}_0) = |\vec{c}|\cos(\vec{c}, \vec{h}_0)$$

$$|\vec{a}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = |\vec{c}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$



Sl. 43.

$$|\vec{a}|\sin\gamma = |\vec{c}|\sin\alpha$$

tj.

$$\frac{|\vec{a}|}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{c}|}{\sin\gamma}.$$

642.

Dokazati vektorskim putem da je periferijski ugao u krugu nad prečnikom prav (sl. 44).

643.

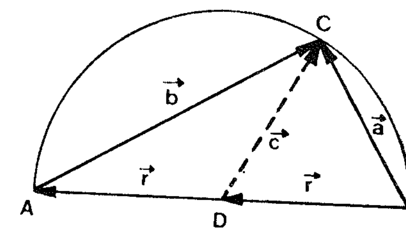
Sa slike 44 se dobija da je:

$$\vec{a} = \vec{r}+\vec{c}$$

$$\vec{b} = \vec{c}-\vec{r}$$

Periferijski ugao je prav ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ uzajamno normalni, tj. ako je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$



Sl. 44.

Zaista,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{r}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{r}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{r}|^2 = 0, \text{ jer je } |\vec{c}| = |\vec{r}|.$$

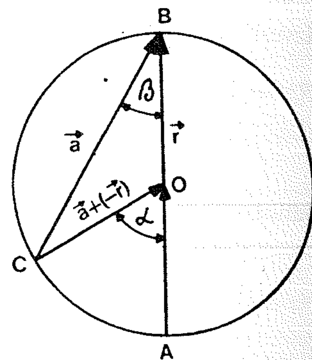
644.

Dokazati da je centralni ugao u krugu dva puta veći od periferijskog ugla na istom luku.

Rješenje. Dakle, treba dokazati da je:

$$\alpha = 2\beta.$$

Sa slike 45 imamo:



Sl. 45.

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}-\vec{r})\cdot\vec{r}}{|\vec{a}-\vec{r}|\,|\vec{r}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}-|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|\,|\vec{r}|} =$$

$$= \frac{|\vec{a}|\,|\vec{r}|\cos(\vec{a},\vec{r})-|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|\,|\vec{r}|} =$$

$$= \frac{|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{r})-|\vec{r}|}{|\vec{r}|} =$$

$$= \frac{2|\vec{a}|}{2|\vec{r}|}\cos(\vec{a},\vec{r})-1, \qquad (1)$$

tj.:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{r}|}\cdot 2\cos\beta - 1,$$

jer je:

$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{r}) = \beta.$$

Iz pravouglog trougla ABC imamo da je:

$$\cos\beta = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{r}|}.$$

Prema tome je:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{r}|}\cdot 2\cos\beta - 1 = 2\cos^2\beta - 1.$$

Međutim, znamo da je $2\cos^2\beta = 1+\cos^2\beta$, te je:

$$\cos\alpha = 1+\cos 2\beta - 1$$

$$\cos\alpha = \cos 2\beta,$$

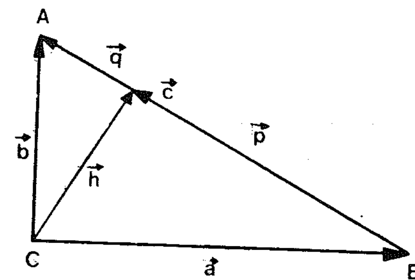
odnosno:

$$\alpha = 2\beta.$$

645.

Dokazati da je vektor hipotenuzine visine geometrijska sredina hipotenuzinih odsječaka.

Rješenje. Potrebno je uočiti da je:



Sl. 46.

$$\mathrm{pr}_{\vec{q}}\,\vec{a} = -|\vec{p}|$$

$$\mathrm{pr}_{\vec{p}}\,\vec{b} = |\vec{q}|$$

$$\vec{p}\cdot\vec{b} = |\vec{p}|\,\mathrm{pr}_{\vec{p}}\,\vec{b} = |\vec{p}|\,|\vec{q}|$$

$$\vec{a}\cdot\vec{q} = |\vec{q}|\,\mathrm{pr}_{\vec{q}}\,\vec{a} = -|\vec{p}|\,|\vec{q}|$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos 0 = |\vec{p}|\,|\vec{q}|$$

Sa slike (46) vidi se da je:

$$\vec{h} = \vec{a}+\vec{p}$$

$$\vec{h} = \vec{b}-\vec{q}.$$

Prema tome je:

$$|\vec{h}|^2 = (\vec{a}+\vec{p})(\vec{b}-\vec{q}) = \vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\vec{b}-\vec{p}\cdot\vec{q} =$$

$$= 0+|\vec{p}|\,|\vec{q}|+|\vec{p}|\,|\vec{q}|-|\vec{p}|\,|\vec{q}| = |\vec{p}|\,|\vec{q}|$$

$$|\vec{h}| = \sqrt{|\vec{p}|\,|\vec{q}|}.$$

646.

Dokazati da su dijagonale jednakokrakog trapeza jednake.

Rješenje. Iz definicije jednakokrakog trapeza slijedi da je:

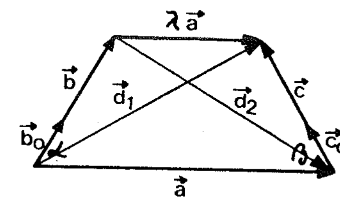
$$|\vec{b}| = |\vec{c}| \quad \text{i} \quad \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}).$$

Zatim uzmimo da je:

$$|\vec{b}_0| = |\vec{c}_0| = 1, \quad \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}_0) = \alpha,$$

$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{c}_0) = \beta.$$

Sa slike 47 slijedi da je:



Sl. 47.

$$\vec{d}_1 = \vec{a}+\mu\,\vec{c}_0$$

$$\vec{d}_2 = \vec{a}-\mu\,\vec{b}_0.$$

Prema tome je:

$$|\vec{d_1}|^2 = |\vec{a}|^2 + \mu^2 |\vec{c_0}|^2 + 2\mu |\vec{a}| |\vec{c_0}| \cos(\vec{a}, \vec{c_0})$$

$$|\vec{d_2}|^2 = |\vec{a}|^2 + \mu^2 |\vec{b_0}|^2 - 2\mu |\vec{a}| |\vec{b_0}| \cos(\vec{a}, \vec{b_0})$$

Zbog $|\vec{b_0}| = |\vec{c_0}| = 1$ imamo da je:

$$|\vec{d_1}|^2 = |\vec{a}|^2 + \mu^2 + 2\mu |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{c_0}) \quad (1)$$

$$|\vec{d_2}|^2 = |\vec{a}|^2 + \mu^2 - 2\mu |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b_0}). \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) slijedi da je:

$$|\vec{d_1}| = |\vec{d_2}|,$$

pod uslovom da je:

$$\cos(\vec{a}, \vec{c_0}) = -\cos(\vec{a}, \vec{b_0}).$$

Uslov je ispunjen jer zbog

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b_0}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c_0})$$

tj.:

$$\alpha = \pi - \beta$$

imamo da je:

$$\cos\beta = -\cos(\pi - \beta)$$

tj.:

$$\cos\beta = \cos\beta.$$

647.

Naći projekciju vektora $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$ na vektor $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, gdje su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ uzajamno normalni ortovi.

Rješenje.

$$\text{pr}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(10\vec{m} + 2\vec{n})\cdot(5\vec{m} - 12\vec{n})}{\sqrt{(5\vec{m} - 12\vec{n})^2}} = 2.$$

648.

Ako su dati $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{p}|$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{p})$ i $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{p})$, naći projekciju vektora $\vec{a} - \vec{b}$ na vektor $\vec{p}$.

Rješenje.

$$\text{pr}_{\vec{p}}(\vec{a} - \vec{b}) = \text{pr}_{\vec{p}}\vec{a} - \text{pr}_{\vec{p}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} =$$

$$= \frac{|\vec{a}||\vec{p}|}{|\vec{p}|}\cos(\vec{a}, \vec{p}) - \frac{|\vec{b}||\vec{p}|}{|\vec{p}|}\cos(\vec{b}, \vec{p}) =$$

$$= |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{p}) - |\vec{b}|\cos(\vec{b}, \vec{p}).$$

649.

Date su tačke $A(3, -1,2)$ i $B(-1,2, -1)$. Naći koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$.

Rješenje. Ako su, na primjer, date tačke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$, onda su koordinate vektora koji ih spajaju sljedeće:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{BA} = \{x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2\}.$$

Prema tome imaćemo:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1 \ -3,2 - (-1),\ -1 - 2\} = \{-4,3 - 3\},$$

$$\overrightarrow{BA} = \{3 - (-1),\ -1 - 2,2 - (-1)\} = \{4,\ -3,\ 3\}.$$

650.

Ako je početak vektora $\vec{a} = \{3, -1, 4\}$ u tački $A(1, 2, -3)$, naći koordinate njegovog kraja.

Rješenje. Ako je, na primjer, kraj vektora $\vec{a}$ u nekoj tački $B(x, y, z)$ onda je:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

tj.

$$\{3, -1,4\} = \{x - 1,\ y - 2,\ z + 3\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 = 3 \\ y - 2 = -1 \\ z + 3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 1, \end{array}$$

tj. kraj vektora $\vec{a}$ nalazi se u tački $B(4, 1, 1)$.

651.

Naći treću koordinatu vektora $\vec{a}$, ako su mu prve dvije koordinate 4 i -12, a intenzitet mu je 13.

Rješenje.

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$13=\sqrt{16+144+z^2}$$
$$z^2=9$$
$$z=\pm 3.$$

Znači, postoje dva vektora koji zadovoljavaju date uslove.

652.

Odrediti jedinični vektor $\vec{a}_0$ vektora $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

Rješenje. Ako je neki vektor $\vec{a}$ dat svojim koordinatama $\vec{a}=(x, y, z)$, onda je njegov jedinični vektor

$$\vec{a}_0=\left\{\frac{x}{|\vec{a}|}, \frac{y}{|\vec{a}|}, \frac{z}{|\vec{a}|}\right\}.$$

U našem slučaju biće:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{36+4+9}=7$$

$$\frac{x}{|\vec{a}|}=\frac{6}{7}, \quad \frac{y}{|\vec{a}|}=-\frac{2}{7}, \quad \frac{z}{|\vec{a}|}=-\frac{3}{7},$$

tj.:

$$\vec{a}_0=\left\{\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right\}.$$

653.

Odrediti intenzitet i pravac vektora $\vec{a}=(3, -4, 12)$.

Rješenje.

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{9+16+144}=13.$$

Pravac vektora je određen uglovima koje vektor zaklapa sa koordinatnim osama, tj. sa njihovim kosinusima koji glase:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}=\frac{3}{13}, \quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}=-\frac{4}{13}, \quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}=\frac{12}{13}.$$

654.

Odrediti koordinate vektora $\vec{a}$ koji sa osom OX zaklapa ugao $\alpha=\frac{\pi}{4}$, sa osom OY zaklapa ugao $\beta=\frac{\pi}{3}$, intenzitet mu je 6, a koordinata z je negativna.

Rješenje. Ako je traženi vektor $\vec{a}=\{x, y, z\}$ onda je:

$$x=|\vec{a}|\cos\alpha=6\cos\frac{\pi}{4}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

$$y=|\vec{a}|\cos\beta=6\cos\frac{\pi}{3}=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

$$z=|\vec{a}|\cos\gamma.$$

Nepoznati ugao γ naćićemo iz relacije:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\gamma=1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1$$

$$\cos^2\gamma=\frac{1}{4}, \text{ tj. } \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

Pošto se po pretpostavci zadatka traži negativna koordinatà z, to ćemo uzeti vrijednost $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$, tj.:

$$z=|\vec{a}|\cos\gamma=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3.$$

Prema tome, koordinate vektora $\vec{a}$ glase:

$$\vec{a}=\{3\sqrt{2}, 3, -3\}.$$

655.

Odrediti koordinate vektora $\vec{r}$ čiji je intenzitet 3 i koji sa koordinatnim osama zaklapa jednake uglove.

Rješenje. Znajući da je $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, i činjenicu da vektor $\vec{r}$ zaklapa jednake uglove sa koordinatnim osama, tj. $\alpha=\beta=\gamma$ to je:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$3\cos^2\alpha=1$$
$$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Prema tome, ort $\vec{r}_0$ vektora $\vec{r}$ će da glasi:

$$\vec{r}_0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\gamma+\vec{k}\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i}\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}.$$

Međutim, traženi vektor je:

$$\vec{r}=|\vec{r}|\vec{r}_0=3\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i}\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}\right)=$$
$$=\{\pm\sqrt{3},\quad \pm\sqrt{3},\quad \pm\sqrt{3}\},$$

gdje svuda vrijedi ili samo snak + ili samo znak −.

656.

Za vektore $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$ i $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}$ izračunati:

a) $\vec{a}+\vec{b}$, d) $-\frac{1}{2}\vec{b}$,

b) $\vec{a}-\vec{b}$, e) $2\vec{a}+3\vec{b}$,

c) $2\vec{a}$, f) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

Rješenje.

a) $\vec{a}+\vec{b}=(3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k})+(-2\vec{i}+\vec{j})=\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$,

b) $\vec{a}-\vec{b}=(3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k})-(-2\vec{i}+\vec{j})=5\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$,

c) $2\vec{a}=2(3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k})=6\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$,

d) $-\frac{1}{2}\vec{b}=-\frac{1}{2}(-2\vec{i}+\vec{j})=\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$,

e) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k})+3(-2\vec{i}+\vec{j})=-\vec{j}+12\vec{k}$,

f) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}=\frac{1}{3}(3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k})-(-2\vec{i}+\vec{j})=3\vec{i}-\frac{5}{3}\vec{j}+2\vec{k}$.

657.

Dati su vektori $\vec{a}=\{4,\ -2,\ -4\}$ i $\vec{b}=\{6,\ -3,\ 2\}$, izračunati:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$, 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$, 4) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$,

5) $(\vec{a}+\vec{b})^2$ i 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

Rješenje.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(4\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k})\cdot(6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})=24+6-8=22$,

2) $\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{(4\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k})^2}=\sqrt{16+4+16}=6$,

3) $\sqrt{\vec{b}^2}=\sqrt{(6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})^2}=\sqrt{36+9+4}=7$,

4) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=(-10\vec{i}+5\vec{j}-14\vec{k})\cdot(16\vec{i}-8\vec{j})=$
$=-160-40=-200$,

5) $(\vec{a}+\vec{b})^2=(10\vec{i}-5\vec{j}-2\vec{k})^2=100+25+4=129$,

6) $(\vec{a}-\vec{b})^2=(-2\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k})^2=4+1+36=41$.

658.

U vektorima $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ i $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$, odrediti α i β tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu kolinearni.

Rješenje. Da bi vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bili kolinearni, potrebno je da su im koordinate proporcionalne:

$$\frac{-2}{\alpha}=\frac{3}{-6}=\frac{\beta}{2},$$

tj.:

$$\alpha=4,\quad \beta=-1.$$

659.

Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ i $\vec{b}=\lambda\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ budu međusobno normalni.

Rješenje. Da bi vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bili međusobno normalni, treba da je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$$

što daje:

$$3\lambda-8-6=0,\ \text{pa je}\ \lambda=\frac{14}{3}.$$

660.

Dokazati da su radius — vektori:

$$\vec{a}=10\vec{i}-5\vec{j}+10\vec{k},\quad \vec{b}=-11\vec{i}-2\vec{j}+10\vec{k}$$

i

$\vec{c}=-2\vec{i}-14\vec{j}-5\vec{k}$ ivice kocke.

Rješenje. Da bi dati vektori bili ivice kocke, treba da imaju jednake intenzitete i da su međusobno okomiti. U ovom slučaju je zaista:

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=15 \quad \text{i} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0.$$

661.

Predstaviti vektor $a=9\vec{i}+4\vec{j}$ u obliku linearne kombinacije vektora $\vec{p}=2\vec{i}-3\vec{j}$ i $\vec{q}=\vec{i}+2\vec{j}$.

Rješenje.

$$\vec{a}=\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}$$

$$9\vec{i}+4\vec{j}=\lambda(2\vec{i}-3\vec{j})+\mu(\vec{i}+2\vec{j})$$

$$9\vec{i}+4\vec{j}=(2\lambda+\mu)\vec{i}+(-3\lambda+2\mu)\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{r}2\lambda+\mu=9\\ -3\lambda+2\mu=4\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda=2,\ \mu=5.$$

Prema tome je:

$$\vec{a}=2\vec{p}+5\vec{q}.$$

662.

Naći projekciju vektora $\vec{a}=\{5,\ 2,\ 5\}$ na vektor $\vec{b}=\{2,\ -1,\ 2\}$.

Rješenje.

$$\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{(5\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k})\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})}{\sqrt{(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})^2}}=6.$$

663.

Naći projekciju vektora $\vec{a}=\{4,\ -3,\ 2\}$ na vektor $\vec{p}$ koji sa koordinatnim osama zahvata jednake oštre uglove.

Rješenje. Neka je $\vec{p}_0$ ort vektora $\vec{p}$, onda iz relacije:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \quad \text{za} \quad \alpha=\beta=\gamma$$

dobijamo:

$$3\cos^2\alpha=1,\ \text{tj.}\ \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

U daljem radu uzećemo pozitivnu vrijednost jer vektor $\vec{p}$ zaklapa oštre uglove sa koordinatnim osama, tj.:

$$\vec{p}_0=\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}.$$

Prema tome je:

$$\mathrm{pr}_{\vec{p}_0}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{p}_0}{|\vec{p}_0|}=(4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k})\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}\right)=\sqrt{3}.$$

664.

Dati su vektori $\vec{a}=\{2,\ -3,\ 6\}$ i $\vec{b}=\{-1,\ 2,\ -2\}$, naći koordinate vektora $\vec{c}$ koji polovi $\sphericalangle(\vec{a},\ \vec{b})$ i čiji je intenzitet $3\sqrt{42}$.

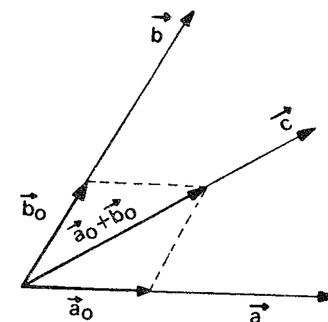
Rješenje.

$$\vec{c}=\lambda(\vec{a}_0+\vec{b}_0)$$

$$|\vec{a}|=7,\ |\vec{b}|=3$$

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{2}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\vec{b}_0=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}.$$



Sl. 48.

Prema tome je:

$$\vec{c}=\lambda\left(-\frac{1}{21}\vec{i}+\frac{5}{21}\vec{j}+\frac{4}{21}\vec{k}\right)$$

$$|\vec{c}|=\frac{\lambda\sqrt{42}}{21}.$$

Iz uslova zadatka imamo da je $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$, pa je:

$$\frac{\lambda\sqrt{42}}{21}=3\sqrt{42}$$

$$\lambda=63.$$

Prema tome, traženi vektor $\vec{c}$ glasi:

$$\vec{c}=\lambda\left(-\frac{1}{21}\vec{i}+\frac{5}{21}\vec{j}+\frac{4}{21}\vec{k}\right)=-3\vec{i}+15\vec{j}+12\vec{k}.$$

665.

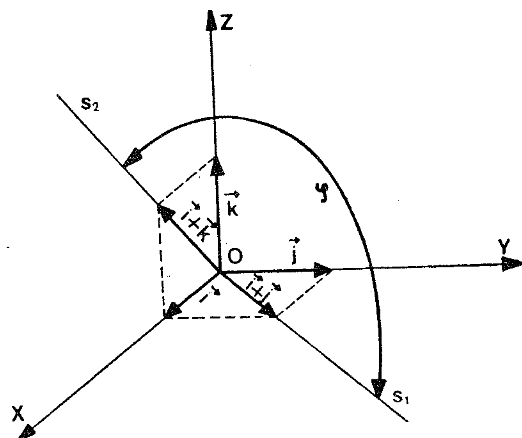
Naći ugao između simetrala uglova XOY i XOZ.

Rješenje.

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{i}+\vec{j})\cdot(\vec{i}+\vec{k})}{|\vec{i}+\vec{j}|\,|\vec{i}+\vec{k}|} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$



Sl. 49.

666.

Odrediti vektor $\vec{r}$ kolinearan vektoru $\vec{a}=\{6,\ -8,\ -7,5\}$, tako da mu intenzitet bude 50 i da sa z osom obrazuje oštar ugao.

Rješenje. Pošto je vektor $\vec{r}$ kolinearan sa vektorom $\vec{a}$, to je:

$$\vec{r} = \lambda\vec{a} = 6\lambda\vec{i} - 8\lambda\vec{j} - 7,5\lambda\vec{k}.$$

Da bi vektor $\vec{r}$ obrazovao oštar ugao sa z osom, treba da je koordinata z vektora $\vec{r}$ pozitivna. U našem slučaju ona će biti pozitivna ako je $\lambda<0$ jer je odgovarajuća koordinata z vektora $\vec{r}$ jednaka $-7,5\lambda$.

Iz uslova zadatka imamo da je:

$$|\vec{r}| = 50$$

$$\sqrt{36\lambda^2 + 64\lambda^2 + 56,25\lambda^2} = 50$$

$$\lambda = \pm 4.$$

Kao što smo ustanovili, nama je potrebna negativna vrijednost od λ, tj. $\lambda = -4$, pa će traženi vektor $\vec{r}$ da glasi:

$$\vec{r} = -24\vec{i} + 32\vec{j} + 30\vec{k}.$$

667.

Naći vektor $\vec{r}$ normalan na osu z koji zadovoljava uslove $\vec{r}\cdot\vec{a}=9$, $\vec{r}\cdot\vec{b}=-4$, pri čemu je: $\vec{a}=\{3,\ -1,\ 5\}$ i $\vec{b}=\{1,\ 2,\ -3\}$.

Rješenje. S obzirom da je traženi vektor $\vec{r}$ normalan na osu z, to on ima oblik:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Da bismo ga odredili, potrebno je naći vrijednost njegovih koordinata x i y, a njih ćemo dobiti iz uslova zadatka:

$$\vec{r}\cdot\vec{a} = (x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}) = 9$$

$$\vec{r}\cdot\vec{b} = (x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}) = -4$$

$$3x - y = 9$$

$$x + 2y = -4$$

$$x = 2,\ y = -3.$$

Prema tome, traženi vektor $\vec{r}$ glasi:

$$\vec{r} = 2\vec{i} - 3\vec{j}.$$

668.

Vektor $\vec{r}$ je normalan na osu z i na vektor $\vec{a}=\{8,\ -15,\ 3\}$, a sa osom x gradi oštar ugao.

Odrediti njegove koordinate ako mu je intenzitet 51.

Rješenje. Pošto je vektor $\vec{r}$ normalan na osu z, to će on da glasi:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Pošto je vektor $\vec{r}$ normalan na vektor $\vec{a}$ to je:

$$\vec{r}\cdot\vec{a} = 0$$

tj.:

$$(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(8\vec{i}-15\vec{j}+3\vec{k}) = 0$$

ili

$$8x-15y=0. \qquad (1)$$

Međutim, iz uslova:

$$|\vec{r}|=51$$

imamo da je:

$$\sqrt{x^2+y^2}=51$$

tj.:

$$x^2+y^2=2601 \qquad (2)$$

Rješavanjem sistema jednačina (1) i (2) dobijamo da je:

$$x_1=45, \quad y_1=24$$

$$x_2=-45, \quad y_2=-24.$$

Pošto traženi vektor $\vec{r}$ zaklapa sa x-osom oštar ugao, to u obzir dolazi samo pozitivna apscisa $x=45$.

Prema tome je:

$$\vec{r}=45\vec{i}+24\vec{j}.$$

669. Odrediti parametar λ da intenziteti vektora:

$$\vec{a}=\{2e^{\lambda}, \lambda^2, \lambda-1\} \text{ i } \vec{b}=\{\lambda+1, \lambda-2, 0\},$$

budu jednaki, a zatim naći ugao između njih.

Rješenje.

$$|\vec{a}|=\sqrt{4e^{2\lambda}+\lambda^4+(\lambda-1)^2}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-2)^2}$$

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|$$

$$\sqrt{4e^{2\lambda}+\lambda^2+(\lambda-1)^2}=\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-2)^2}$$

$$e^{2\lambda}=1$$

$$2\lambda\ln e=\ln 1$$

$$2\lambda=0$$

$$\lambda=0.$$

Prema tome vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ glase $\vec{a}=\{2, 0, -1\}$, $\vec{b}=\{1, -2, 0\}$.

Kosinus ugla koji oni zaklapaju glasi:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2}{5}.$$

7.9. Vektorski proizvod dva vektora

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva slobodna vektora dovedeni na zajednički početak O, gdje je $\vec{a}$ prvi, a $\vec{b}$ drugi vektor (sl. 50).

Pod *vektorskim* ili *spoljašnjim proizvodom* dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u oznaci $\vec{a}\times\vec{b}$ podrazumijevamo treći vektor $\vec{c}$ kome je:

a) intenzitet brojno jednak površini paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$,

b) nosač normalan na ravan određenu datim vektorima,

c) smjer takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju desni triedar.

Dakle,

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

gdje je:

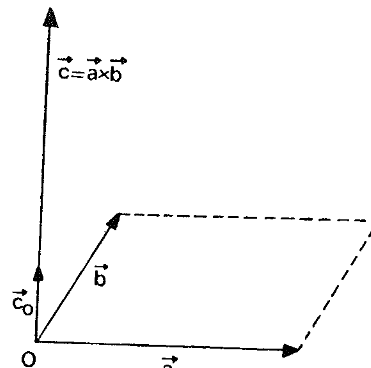
$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}), \qquad [0\leqslant\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\leqslant\pi],$$

odnosno:

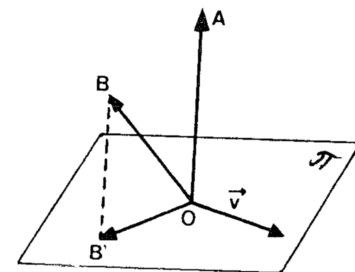
$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})\,\vec{c}_0,$$

gdje je $\vec{c}_0$ ort vektora $\vec{c}$.

Neka su dati vektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i ravan π normalna na vektor $\overrightarrow{OA}$ (sl. 51). Normalna projekcija $\overrightarrow{OB'}$ vektora $\overrightarrow{OB}$ na ravan π zove se spoljašnja projekcija $\overrightarrow{OB}$ na vektor $\overrightarrow{OA}$. S obzirom na definiciju vektorskog proizvoda vidljivo je da vrijedi:



Sl. 50.



Sl. 51.

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB'}=\vec{v}.$$

25*

Zbog toga se vektorski proizvod često zove i *spoljašnji* proizvod.

Pošto je vektorski proizvod dva vektora uvijek vektor, otuda mu i potiče naziv vektorski proizvod.

Vektorski proizvod ima sljedeće osobine:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, $(\vec{a}\neq\vec{0}$ i $\vec{b}\neq\vec{0})$ — uslov kolinearnosti
2. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$ — uslov normalnosti
3. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ — zakon alternacije ili antikomutativnosti
4. $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b}$ — zakon asocijacije sa skalarom
5. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ — zakon distribucije
6. $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati svojim koordinatama u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},$$

tada se njihov vektorski proizvod može napisati u obliku simboličke determinante:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

pri čemu je:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Vektorski proizvod, strogo uzevši, ne može se smatrati determinantom jer elementi te determinante nisu istoimeni matematički objekti jer u prvoj vrsti su vektori, a u drugoj i trećoj skalari.

670.

Naći vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je:

$$|\vec{a}|=2,\quad |\vec{b}|=3 \text{ i } \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}.$$

Rješenje. $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})\vec{c}_0=2\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{2}\vec{c}_0=6\vec{c}_0$,

gdje je $\vec{c}_0$ ort vaktora $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

671.

Izračunati $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ako je: $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$ i $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$.

Rješenje.

$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})\vec{c}_0=6\cdot5\cdot\sin\frac{\pi}{6}\vec{c}_0=15\vec{c}_0$, gdje je $\vec{c}_0$ ort vektora $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$,

tj.:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|15\vec{c}_0|=15, \text{ jer je } |\vec{c}_0|=1.$$

672.

Izračunati $|\vec{a}\times\vec{b}|$, ako je: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$ i $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$.

Rješenje. $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})\vec{c}_0=20\sin(\vec{a},\vec{b})\vec{c}_0$, gdje je $\vec{c}_0$ ort vektora $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=20\sin(\vec{a},\vec{b}).$$

Da bismo odredili $\sin(\vec{a},\vec{b})$, uzmimo uslov da je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=12,$$

ili

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=12,$$

odnosno

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{3}{5}.$$

Međutim, znamo da je:

$$\sin(\vec{a},\vec{b})=\pm\sqrt{1-\cos^2(\vec{a},\vec{b})}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\frac{4}{5}.$$

Prema tome je:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=20\,|\sin(\vec{a},\vec{b})|=20\left|\pm\frac{4}{5}\right|=16.$$

673.

Izračunati $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ako je: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$ i $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$.

Rješenje. Imamo da je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=78\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

Iz uslova zadatka

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=72$$

dobijamo da je:

$$78\sin(\vec{a},\vec{b})=72,$$

odnosno

$$\sin(\vec{a},\vec{b})=\frac{12}{13}.$$

Zatim imamo:

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\pm\sqrt{1-\sin^2(\vec{a},\vec{b})}=\pm\frac{5}{13}$$

Prema tome je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=78\cos(\vec{a},\vec{b})=\pm 30.$$

674.

Dokazati da je:

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Rješenje.

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}+4\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{b}=$$

$$=4\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}=3\vec{a}\times\vec{b},$$

jer je:

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad \text{i} \quad \vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}.$$

675.

Izračunati vektor $\vec{r}$ u zavisnosti od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je: $\vec{r}\perp\vec{a}$, $\vec{r}\perp\vec{b}$ i $|\vec{r}|=3$.

Rješenje. Ako su data dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ na koje je normalan vektor $\vec{r}$, onda je vektor $\vec{r}$ kolinearan sa njihovim vektorskim proizvodom, tj.:

$$\vec{r}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}), \qquad (1)$$

odakle dobijamo da je:

$$\lambda=\frac{\vec{r}}{(\vec{a}\times\vec{b})},$$

tj.:

$$|\lambda|=\frac{|\vec{r}|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{3}{|\vec{a}\times\vec{b}|}. \qquad (2)$$

Smijenimo li relaciju (2) u relaciju (1) dobijamo:

$$\vec{r}=\pm 3\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

Međutim, mogli smo zadatak riješiti i ovim rasuđivanjem; pošto vektor $\vec{r}$ ima isti pravac kao i $(\vec{a}\times\vec{b})$, to smo mogli pisati:

$$\text{ort}\,(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

Prema tome je:

$$\vec{r}=\pm 3\,\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

676.

Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$ i $\vec{b}=\lambda\vec{p}-8\vec{q}$ budu kolinearni.

Rješenje. Uslov kolinearnosti glasi:

$$\vec{a}\times\vec{b}=0$$

$$(2\vec{p}+3\vec{q})\times(\lambda\vec{p}-8\vec{q})=0$$

$$-16(\vec{p}\times\vec{q})+3\lambda(\vec{q}\times\vec{p})=0$$

$$-16(\vec{p}\times\vec{q})-3\lambda(\vec{p}\times\vec{q})=0$$

$$-3\lambda(\vec{p}\times\vec{q})=16(\vec{p}\times\vec{q})$$

$$-3\lambda=16$$

$$\lambda=-\frac{16}{3}.$$

677.

Izračunati površinu paralelograma koji čine vektori $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 4\vec{n}$, gdje su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ uzajamno normalni ortovi.

Rješenje. Pošto je intenzitet vektorskog proizvoda vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ brojno jednak površini paralelograma koji čine vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, to je:

$$p = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

S obzirom da je:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{m} + 3\vec{n}) \times (\vec{m} - 4\vec{n}) = 11(\vec{n} \times \vec{m}) =$$

$$= 11|\vec{n}|\,|\vec{m}| \sin\frac{\pi}{2}\vec{c}_0 = 11\vec{c}_0$$

jer je: $|\vec{n}| = |\vec{m}| = 1$ to je

$$p = |\vec{a} \times \vec{b}| = |11\vec{c}_0| = 11$$

jer je: $|\vec{c}_0| = 1$.

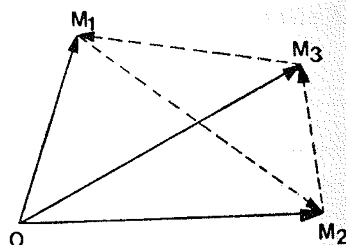
678.

Dati su vektori položaja: $\overrightarrow{OM_1} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OM_2} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OM_3} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ tačaka M_1, M_2 i M_3.

Odrediti jednačini vektor normalan na ravan određenu tačkama M_1, M_2 i M_3 i koji sa z-osom obrazuje oštar ugao.

Rješenje. Normalni ort na ravan datu tačkama M_1, M_2 i M_3 glasi:

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}}{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}|},$$



Sl. 52.

pri čemu je:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}| = \sqrt{26}.$$

Vodeći računa da se zahtijeva da ort $\vec{n}_0$ zaklapa sa z-osom oštar ugao, to ćemo uzeti njegovu negativnu vrijednost, tj.:

$$\vec{n}_0 = -\frac{4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}(-4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}).$$

679.

Izračunati dužinu vektora:

$$\vec{a} = (3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}) \times (\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}).$$

Rješenje.

$$\vec{a} = (3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}) \times (\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}) = 18\vec{k} - 12\vec{j} - 4\vec{k} + 16\vec{i} +$$

$$+ 5\vec{j} - 30\vec{i} = -14\vec{i} - 7\vec{j} + 14\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-14\vec{i} - 7\vec{j} + 14\vec{k})^2} = 21.$$

680.

Izračunati površinu trougla konstruisanog nad vektorima:

$$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q} \text{ i } \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, \text{ gdje je: } |\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = 4 \text{ i } \sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}.$$

Rješenje. Površina trougla je jednaka polovini površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj.:

$$p_\Delta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2\vec{p} - \vec{q}) \times (\vec{p} + 3\vec{q}) = 7(\vec{p} \times \vec{q}) =$$

$$= 7|\vec{p}|\,|\vec{q}| \sin\frac{\pi}{6}\vec{c}_0 = 28\vec{c}_0$$

$$p_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = 14.$$

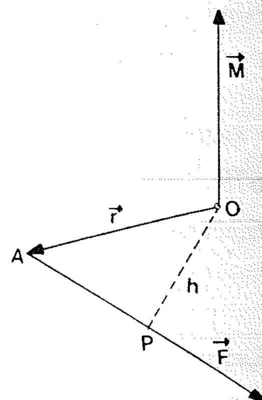
Napomena: U statici čvrstog tijela važnu ulogu igra pojam momenta date sile u odnosu na datu tačku. Kao što je poznato, moment $\vec{M}$ sile $\vec{F}$ u odnosu na datu tačku (pol) O je vektor normalan na ravan u kojoj leži vektor $\vec{F}$ i pol O, smjer mu je određen tako da vektor položaja $\vec{r}$ napadne tačke A sile sa počet-

kom u O, sila $\vec{F}$ i moment $\vec{M}$ čine desni trijedar, a intenzitet mu je brojno jednak proizvodu intenziteta sile $\vec{F}$ i odstojanja tačke O od nosača vektora sile (sl. 53):

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot h$$

Proizvod $|\vec{F}| \cdot \vec{h}$ je zapravo površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{F}$ i $\vec{r}$ kao stranama. Prema tome, moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku O, možemo vektorski izračunati na sljedeći način:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$



S 53

681.

Sila $\vec{F} = \{2, 4, -3\}$ ima napadnu tačku u $A(1, -2, 2)$. Odrediti moment sile $\vec{F}$ u odnosu na koordinatni početak.

Rješenje.

$$\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{r} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) \times (2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) =$$

$$= -2\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}.$$

682.

Sila $\vec{F} = \{3, -1, 2\}$ ima napadnu tačku $A(2, 5 -4)$. Odrediti moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku $B(0, 4, 3)$.

Rješenje.

$$\vec{F} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{BA} = \{2, 1, -7\} = 2\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (2\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}) \times (3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = -5\vec{i} - 25\vec{j} - 5\vec{k}.$$

683.

Vektorskim putem izvesti obrasce za kosinus razlike i kosinus zbira dva ugla.

Rješenje. Zahtjev zadatka je da izvedemo obrasce:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

U tu svrhu uzimamo dva orta $\vec{a}_0$ i $\vec{b}_0$ u ravni XOY i neka sa ortom $\vec{i}$ koordinatne ose OX čine uglove α i β (sl. 54).
Tada je:

$$\vec{a}_0 = \left\{\cos\alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right\} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$$

$$\vec{b}_0 = \left\{\cos\beta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right\} = \{\cos\beta, \sin\beta\}$$

odnosno:

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = \cos(\vec{a}_0, \vec{b}_0) = \cos(\alpha - \beta)$$

ili u koordinatama:

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = (\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) \cdot (\vec{i}\cos\beta + \vec{j}\sin\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

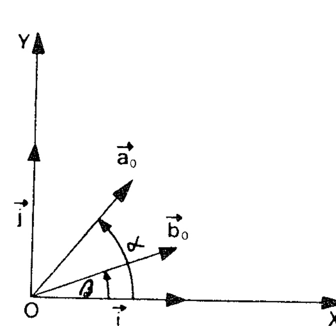
Prema tome je:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

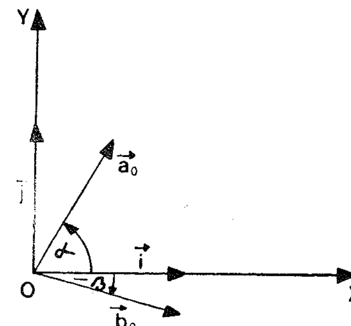
Ako se pak β zamijeni sa $-\beta$ (sl. 55) tada je:

$$\vec{b}_0 = \left\{\cos(-\beta), \cos\left[\frac{\pi}{2} + (-\beta)\right]\right\} =$$
$$= \{\cos\beta, \sin(-\beta)\} = \{\cos\beta, -\sin\beta\},$$

dok koordinate orta $\vec{a}_0$ ostaju nepromijenjene.



Sl. 54.



Sl. 55.

Tada je:

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = \cos(\vec{a}_0, \vec{b}_0) = \cos(a + \beta)$$

ili u koordinatama:

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = (\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) \cdot (\vec{i}\cos\beta - \vec{j}\sin\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Prema tome je:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

684.

Vektorskim putem izvesti obrasce za sinus razlike dva ugla.

Rješenje. Zahtjev zadatka je da izvedemo obrazac:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Služeći se slikom 54, konstatujemo kao u prethodnom zadatku da je:

$$\vec{a}_0=\{\cos\alpha, \sin\alpha\} \text{ i } \vec{b}_0=\{\cos\beta, \sin\beta\},$$

odnosno:

$$\vec{a}_0\times\vec{b}_0=-\sin(\alpha-\beta)\cdot\vec{k}$$

ili u koordinatama:

$$\vec{a}_0\times\vec{b}_0=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & \sin\beta & 0\end{vmatrix}=\vec{k}(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta).$$

Prema tome je:

$$-\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta/\cdot(-1)$$

tj.

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

7.10. Mješoviti proizvod tri vektora

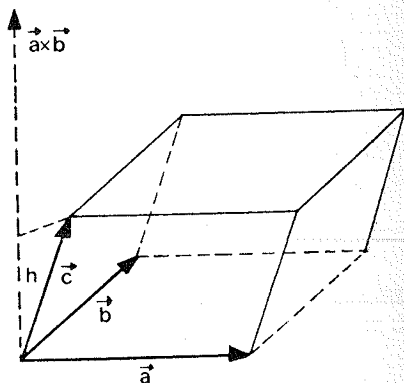
Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tri nekomplanarna vektora sa zajedničkom početnom tačkom O (sl. 56).

Pod mješovitim proizvodom ta tri vektora podrazumijevaćemo skalar,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$

koji je jednak zapremini paralelepipeda konstruisanog nad tim vektorima i to sa znakom + ako vektori čine desni triedar, a sa znakom − ako čine lijevi triedar vektora.

Da bismo to dokazali, posmatrajmo mješoviti proizvod tih vektora $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ i paralelepiped čije su ivice ta tri vektora (sl. 56).



Sl. 56.

Površina baze ovog paralelepipeda je $|\vec{a}\times\vec{b}|$, a algebarska vrijednost njegove visine h, koja odgovara ovoj bazi, je projekcija vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a}\times\vec{b}$, pa je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c})=|\vec{a}\times\vec{b}|\ \text{pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=B\cdot h=V$$

što je trebalo i dokazati.

Sada istaknimo neke od osobina mješovitog proizvoda tri vektora:

1. Cikličkim pomjeranjem vektora u mješovitom proizvodu, vrijednost tog proizvoda se ne mijenja, tj.:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

2. Mješoviti proizvod je jednak nuli ako:

a) je jedan od vektora iz proizvoda nula-vektor,

b) su dva ma koja vektora kolinearna,

c) su vektori komplanarni.

Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dati pravouglim koordinatama:

$$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\},\quad \vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\} \text{ i } \vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\},$$

onda mješoviti proizvod biće:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix},$$

a uslov komplanarnosti tih vektora biće:

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

685.

Odrediti zapreminu paralelepipeda određenog vektorima:

$$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{b}=3\vec{j}+2\vec{k},\quad \vec{c}=5\vec{i}+\vec{j}.$$

Rješenje.

$$V=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 0\end{vmatrix}=-9.$$

Zapremina ima negativnu vrijednost jer vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju triedar lijeve orijentacije.

686.

Kolika je zapremina tetraedra čiji su vrhovi tačke:

$A(0,\ -3,\ -1)$, $B(-2,\ 0,\ -1)$, $C(-2,\ -3{,}5)$ i $D(0,\ 0,\ 7)$?

Kolika je njegova visina spuštena iz D na bazu ABC?

Rješenje. Zapremina tetraedra je šestina zapremine paralelepipeda određenog vektorima $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$, tj.

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Kako je $\overrightarrow{AB}=\{-2,\ 3,\ 0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2,\ 0,\ 6\}$ i $\overrightarrow{AD}=\{0,\ 3,\ 8\}$, to je zapremina tetraedra:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}=14.$$

Visina tetraedra se dobija iz obrasca $V=\dfrac{B\cdot H}{3}$, tj.

$$H=\frac{3V}{B}=\frac{3V}{\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\frac{6V}{|18\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}|}=\frac{V}{|3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}|}=\sqrt{14}.$$

687.

Dati su vektori $\vec{a}=\{2\lambda,\ 1,\ 1-\lambda\}$, $\vec{b}=\{-1,\ 3,\ 0\}$ i $\vec{c}=\{5,\ -1,\ 8\}$.

a) Odrediti λ tako da vektor $\vec{a}$ zaklapa jednake uglove sa vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$,

b) Za tako nađeno λ odrediti nagib vektora $\vec{c}$ prema ravni određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{a}$,

c) Za isto λ odrediti zapreminu i jednu od visina paralelepipeda konstruisanog nad tim vektorima.

Rješenje. a) Kosinusi uglova koje vektor $\vec{a}$ zaklapa sa vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$ glase:

$$\cos(\vec{a},\ \vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|},\quad \cos(\vec{a},\ \vec{c})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}.$$

Po uslovu zadatka ti uglovi su jednaki, pa je:

$$\cos(\vec{a},\ \vec{b})=\cos(\vec{a},\ \vec{c})$$

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}$$

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

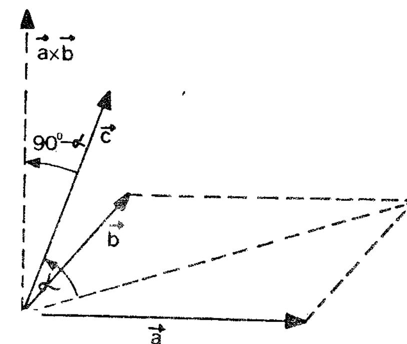
tj.:

$$\frac{-2\lambda+3}{\sqrt{10}}=\frac{2\lambda+7}{3\sqrt{10}},$$

$$\lambda=\frac{1}{4}.$$

b) Za $\lambda=\dfrac{1}{4}$ dobićemo da je: $\vec{a}=\left\{\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{4}\right\}$, $\vec{b}=\{-1,\ 3,\ 0\}$ i $\vec{c}=\{5,\ -1,\ 8\}$, onda nagib vektora $\vec{c}$ prema ravni određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{a}$ (sl. 58) glasi:

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|\ |\vec{c}|}.$$



Sl. 57

Pošto je:

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$

to je:

$$\sin\alpha=\frac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|\ |\vec{c}|}=\frac{\sqrt{19}}{15},$$

jer je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix}=\frac{19}{2},\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{\sqrt{190}}{4},\quad |\vec{c}|=3\sqrt{10}.$$

c) Za $\lambda=\dfrac{1}{4}$ u zadatku pod b) odredili smo zapreminu paralelepipeda ona je iznosila:

$$V=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\frac{19}{2}.$$

Sada odredimo visinu h kao projekciju vektora $\vec{c}$ na $\vec{a}\times\vec{b}$, pri tome je $\vec{h}\perp\vec{a}$ i $\vec{h}\perp\vec{b}$, tj.:

$$h = \underset{\vec{a}\times\vec{b}}{\text{pr}}\,\vec{c} = \frac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{\frac{19}{2}}{\frac{\sqrt{190}}{4}} = \frac{\sqrt{190}}{5}.$$

688.

Dati su vektori položaja $\overrightarrow{OA} = 3(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}_0$, $\overrightarrow{OB} = 2(\vec{a}\times\vec{b})$ i $\overrightarrow{OC} = -\vec{a} - 9\vec{b}$. gdje je $\vec{a} = \{2,2,\ 1\}$, $\vec{b} = \{m,\ 0,\ 0\}$ i $\vec{a}_0 = \text{ort}\,\vec{a}\,(m \neq 0$ realan parametar),

Odrediti:

a) koordinate tačaka A, B, C,

b) m tako da je $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$,

c) za nađeno m izračunati zapreminu tetraedra $OABC$.

Rješenje.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\quad \vec{b} = m\vec{i}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})\cdot m\vec{i} = 2m$$

$$|\vec{a}| = 3$$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$$

Prema tome je:

$$\overrightarrow{OA} = 3(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}_0 = 3\cdot 2m\cdot\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\} = \{4m,\ 4m,\ 2m\},$$

$$\overrightarrow{OB} = 2(\vec{a}\times\vec{b}) = 2\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2m\vec{j} - 4m\vec{k} = \{0{,}2m,\ -4m\}.$$

$$\overrightarrow{OC} = -\vec{a} - 9\vec{b} = -(9m+2)\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = \{-9m-2,\ -2,\ -1\}.$$

Iz dobijenih vektora položaja dobijamo i koordinate njihovih krajnjih tačaka koje su iste kao i kod vektora položaja, tj.:

$$A(4m,\ 4m,\ 2m),\quad B(0,\ 2m,\ -4m)\ \text{i}\ C(-9m-2,\ -2,\ -1).$$

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{-4m,\ -2m,\ -6m\}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \{-13m-2,\ -4m-2,\ -2m-1\}$$

Pošto je $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$, to su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ uzajamno normalni, pa je:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0,$$

odnosno

$$4m^2 + m = 0,$$

tj.:

$$m_1 = -\frac{1}{4},\quad m_2 = 0 \text{ ne dolazi u obzir jer treba da je } m \neq 0.$$

Sl. 58.

c) Za $m = -\frac{1}{4}$ imaćemo da su koordinate vektora:

$$\overrightarrow{OA} = \left\{-1,\ -1, -\frac{1}{2}\right\},\quad \overrightarrow{OB} = \left\{0,\ -\frac{1}{2},\ 1\right\} \text{ i } \overrightarrow{OC} = \left\{\frac{1}{4},\ -2,\ -1\right\}.$$

Prema tome, tražena zapremina tetraedra glasi:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{45}{16}\right) = -\frac{15}{32}.$$

689.

Vektori $\vec{a} = \{\lambda,\ 1{,}1\}$, $\vec{b} = \{1,\ \lambda,\ 1\}$ i $\vec{c} = \{1,\ 1,\ \lambda\}$ su ivice paralelepipeda. Naći:

a) zapreminu paralelepipeda,

b) vektor visine h normalne na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$,

c) odrediti parametar λ tako da zapremina paralelepipeda ima najveću (najmanju) vrijednost i naći te ekstremne vrijednosti zapremine.

Rješenje.

a) $\vec{a}=\lambda\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{b}=\vec{i}+\lambda\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\lambda\vec{k}$

$$V=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

b) Vektor visine glasi:

$$\vec{h}=|\vec{h}|\ \vec{h}_0,$$

gdje iz obrasca za zapreminu $V=B\cdot h$ dobijamo visinu:

$$h=|\vec{h}|=\frac{V}{B}=\frac{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}{\sqrt{(\lambda-1)^2+(\lambda-1)^2+(\lambda^2-1)^2}}=$$

$$=\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda+3}},\quad (\lambda-1>0),$$

i

$$\vec{h}_0=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{\vec{i}+\vec{j}+(\lambda+1)\vec{k}}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda+3}}.$$

Prema tome, traženi vektor visine paralelepipeda glasi:

$$\vec{h}=|\vec{h}|\ \vec{h}_0=\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda+3}}\cdot\frac{\vec{i}+\vec{j}+(\lambda+1)\vec{k}}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda+3}}=$$

$$=\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{\lambda^2+2\lambda+3}\,[\vec{i}+\vec{j}+(\lambda+1)\vec{k}].$$

c) U zadatku pod a) dobili smo zapreminu paralelepipeda u funkciji od parametra λ, tj.:

$$V(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

Dobijena zapremina može biti maksimalna ili minimalna za one vrijednosti parametra λ za koje je:

$$V'(\lambda)=3\lambda^2-3=0,$$

tj. za $\lambda=1$ i $\lambda=-1$.

1) za $\lambda=1$ je $V''(1)=6>0$, pa je zapremina za tu vrijednost parametra λ minimalna i iznosi $V=0$.

2) Za $\lambda=-1$ je $V''(-1)=-6<0$, pa je zapremina za ovu vrijednost parametra λ maksimalna i iznosi $V=4$.

690.

Da li se mogu konstruisati jednaki vektori na susjednim stranicama kvadrata?

691.

Da li se mogu konstruisati jednaki vektori na paralelnim stranama romba?

692.

Kakav uslov treba da zadovolje vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ da bi se od njih mogao sastaviti trougao, ako se početak svakog vektora poklapa sa krajem jednog od dveju drugih vektora?

693.

Strana BC trougla ABC, podijeljena je tačkama D_i $(i=1, 2, 3, 4)$ na pet jednakih dijelova; izraziti vektore $\overrightarrow{D_i A}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

694.

Srednja linija trougla je paralelna sa trećom stranicom i jednaka njenoj polovini. Dokazati!

695.

Neka su M i N sredine stranica AB i CD četvorougla $ABCD$, dokazati da je $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

696.

U paralelogramu $ABCD$ dati su vektori dijagonala $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, i $\overrightarrow{DB}=\vec{d}$. Izraziti vektore svih stranica ovog paralelograma pomoću vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$.

697.

Neka je S težište trougla ABC. Pokazati da je $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=0$.

698.

Data je trostrana piramida čija je baza trougao $A\,B\,C$, vrh S. Ako su tačke C_1, A_1, B_1 sredine ivica AB, BC i CA, pokazati da je $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{A_1 S}+\overrightarrow{B_1 S}+\overrightarrow{C_1 S}$.

699.

Data je četvorostrana piramida čija je baza paralelogram $ABCD$, a vrh S. Pokazati da je $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\,\overrightarrow{SO}$, gdje je O presjek dijagonala $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$ paralelograma $ABCD$.

700.

Neka je H ortocentar trougla MPQ i O centar opisane kružnice trougla. Dokazati da važi relacija:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AH}),$$

gdje je A proizvoljna tačka u ravni trougla.

701.

Dokazati da je relacija jednakosti dva vektora »tranzitivna«, tj. ako je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$ da je uvijek i $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$.

702.

Neka su data četiri slobodna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ po volji izabrana. Konstruisati vektore:

$$\text{a) } \vec{e}=3\,\vec{a}-2\,\vec{b}-(\vec{c}-\vec{d}) \quad \text{b) } \vec{f}=\frac{1}{2}\,\vec{c}+\frac{2}{3}\,(\vec{a}-\vec{b}+2\,\vec{d}).$$

703.

Ako su A, B, C, D, E vrhovi pravilnog petougla, a S centar opisane kružnice, dokazati da je:

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{ES}.$$

704.

Ako su A, B, C, D, E, F redom vrhovi pravouglog šestougla, odrediti rezultantu vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, i $\overrightarrow{AF}$.

705.

Nad stranama trougla ABC konstruisani su ma kakvi paralelogrami $ABML$, $BCPN$ i $ACQR$. Dokazati da se od vektora $\overrightarrow{RL}$, $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{PQ}$ može sastaviti trougao.

706.

Kakav je međusobni odnos vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $\vec{a}:\vec{b}=-\frac{2}{3}$?

707.

Dat je paralelogram $ABCD$. Označimo sa P presjek dijagonala paralelograma, a sa O proizvoljnu tačku različitu od tačke P. Može li se skalarom (brojem) izraziti odnos:

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}):\overrightarrow{OP}=?$$

708.

Kakav međusobni položaj i kakve osobine moraju imati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ da bi bilo:

$$1)\ \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad 2)\ \vec{a}=-2\lambda\vec{b}, \quad 3)\ \vec{a}+\vec{b}=\lambda(\vec{a}-\vec{b}).$$

709.

Znajući linearnu zavisnost vektora $\vec{l}$, $\vec{m}$ i $\vec{n}$ sa tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, provjeriti da li su $\vec{l}$, $\vec{m}$ i $\vec{n}$ komplanarni, ako je to slučaj dati linearnu zavisnost kojom su vezani:

1)	2)	3)
$\vec{l}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$	$\vec{l}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$	$\vec{l}=\vec{c}$
$\vec{m}=2\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$	$\vec{m}=\vec{b}+\vec{c}$	$\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$
$\vec{n}=2\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$,	$\vec{n}=-\vec{a}+\vec{c}$,	$\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

710.

U kom će slučaju komponenta vektora $\vec{a}$ na pravoj (L) biti: a) jednaka nuli, b) jednaka vektoru $\vec{a}$?

711.

»Nacrtati« tačku $A(6,\ 3,\ -2)$ i odrediti dužinu, pravac i smjer njenog radijus vektora.

712.

Konstruisati vektor $\vec{r}=\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\,\vec{j}+5\,\vec{k}$ i odrediti mu intenzitet, pravac i smjer.

713.

Odrediti koordinate vektora $\vec{a}$ dužine $|\vec{a}|=6$, ako on zatvara s koordinatnim osama uglove $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$ i $\gamma<\frac{\pi}{2}$.

714.

Odrediti dužinu vektora $\vec{a}=\left\{\frac{5}{2}\sqrt{2},\ \frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\right\}$ i uglove što ih on zaklapa sa koordinatnim osama.

715.

Da li su vektori $\vec{a}=\{4,\ -6,\ 10\}$ i $\vec{b}=\{-6,\ 9,\ -15\}$ kolinearni?

716.

Ako je $\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}+\frac{4}{3}\vec{k}$, odrediti koordinate x i z vektora $\vec{b}=x\vec{i}+4\vec{j}+z\vec{k}$ tako da on bude s vektorom $\vec{a}$ kolinearan.

717.

Ako je dat vektor $\vec{a}=\{4,\ -3,\ 12\}$, odrediti njegov ort.

718.

Ako su dati vektori $\vec{a}=\left\{\frac{5}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{7}{4}\right\}$ i $\vec{b}=\left\{-\frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3}\right\}$, odrediti $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$.

719.

Vektor $\vec{a}$ je zadat svojim krajnjim tačkama $A(2,\ 1,\ -4)$ i $B(1,\ 3,\ 2)$. Odrediti pravac i smjer vektora $\vec{a}$.

$$\left(\text{Rezultat: } \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{41}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{41}},\ \cos\gamma=\frac{6}{\sqrt{41}}\right).$$

720.

Odrediti skalarni proizvod vektora $\vec{a}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$ i $\vec{b}=-5\vec{i}+13\vec{j}+12\vec{k}$ i ugao koji ta dva vektora zaklapaju.

721.

Odrediti koordinatu y vektora $\vec{a}=2\vec{i}+y\vec{j}+\vec{k}$, tako da on bude normalan na vektor $\vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$.

722.

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su uzajamno normalni, a vektor $\vec{c}$ zaklapa s njima uglove veličine $\frac{\pi}{3}$. Ako se zna da je: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ i $|\vec{c}|=8$ izračunati:

a) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, b) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$,

c) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

723.

Dati su ortovi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ koji zadovoljavaju uslov $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=0$. Izračunati $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}$.

Rješenje. Pomnožimo skalarno uslov $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=0$ prvo sa $\vec{u}$, a zatim sa $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dobićemo redom:

$$1+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{u}=0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}+1+\vec{v}\cdot\vec{w}=0$$

$$\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w}+1=0$$

Saberimo sada ove tri jednačine i dobićemo:

$$3+2[\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}]=0,$$

tako da je:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}=-\frac{3}{2}.$$

724.

Ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zaklapaju ugao $\varphi=\frac{\pi}{6}$ i $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, koliki je ugao između vektora $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$?

725.

Svaka dva od vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zatvaraju između sebe ugao veličine $\frac{\pi}{3}$. Odrediti intenzitet vektora $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ako je: $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=6$.

726.

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su takvi da je: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{i}) = \sphericalangle(\vec{c}, \vec{i}) = \frac{\pi}{6}$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{j}) = -\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{c}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i svi leže u ravni XOY. Odrediti vektor $\vec{b}$ tako da projekcija zbira $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ na y-osu bude jednaka nuli. Konstruisati vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

727.

Dati su vektori $\vec{a} = \{4, -2, -4\}$ i $\vec{b} = \{6, -3, 2\}$.
Izračunati: a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, b) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$, c) $(\vec{a} \pm \vec{b})^2$.

728.

Izračunati rad koji izvrši sila $\vec{f} = \{3, -5, 2\}$ pri pravolinijskom pomijeranju napadne tačke sile od početne do krajnje tačke vektora $\vec{s} = \{2, -5, -7\}$. $(R = \vec{f} \cdot \vec{s})$.

729.

Tri sile: $\vec{f_1} = \{3, -4, 2\}$, $\vec{f_2} = \{2, 3, -5\}$ i $\vec{f_3} = \{-3, -2, 4\}$ imaju istu napadnu tačku. Izračunati rad koji izvrši rezultanta ovih sila pri pravolinijskom pomijeranju zajedničke napadne tačke iz položaja $A(5, 3, -7)$ u položaj $B(4, -1, -4)$.

730.

Izračunati uglove u trouglu čiji su vrhovi u tačkama $A(2, -5, 1)$, $B(6, -3, 5)$, $C(6, -4, 9)$.

731.

Odrediti vektor $\vec{x}$, kolinearan sa vektorom $\vec{a} = \{1, -3, 2\}$ koji zadovoljava uslov $\vec{x} \cdot \vec{a} = 7$.

732.

Data su tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Šta predstavlja proizvod $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$? Da li je to skalar ili vektor? Da li se vrijednost proizvoda $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ razlikuje od vrijednosti prvog proizvoda?

733.

Izračunati projekciju vektora $(3\vec{a} - 2\vec{b})$ na vektor $\vec{c}$, ako je:

$$\vec{a} = \{-2, 1, 1\}, \quad \vec{b} = \{1, 5, 0\} \text{ i } \vec{c} = \{4, 4, -2\}.$$

734.

Data su tri vektora $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = 9\vec{i} + 14\vec{j} + 16\vec{k}$. Rastaviti vektor $\vec{b}$ u pravcu vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$.

735.

Odrediti vektor $\vec{r}$ normalan na vektore $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$ i $\vec{b} = \{1, -2, 3\}$ za koje je: $\vec{r} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

736.

Odrediti vektor $\vec{r}$ normalan na vektore: $\vec{a} = \{3, 2, 2\}$ i $\vec{b} = \{18, -22, -5\}$, tako da sa y-osom obrazuje tupi ugao i da mu intenzitet bude 14.

737.

Uprostiti izraz: $[(\vec{j} \times \vec{k}) \times \vec{j}] \times \vec{j}$.

738.

Izračunati $\vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j}) - \vec{i} \times (\vec{k} + \vec{j}) + \vec{j} \times (\vec{k} + \vec{i} + \vec{j})$.

739.

Zadani su vektori: $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$. Izračunati:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$, b) $\vec{b} \times \vec{a}$, c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$.

740.

Dati su vektori: $\vec{a} = \{1, 1, -1\}$, $\vec{b} = \{-2, -1, 2\}$ i $\vec{c} = \{1, -1, 2\}$.

a) Razložiti vektor $\vec{c}$ u komponente po vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $(\vec{a} \times \vec{b})$.

b) Izračunati ugao koji obrazuje vektor $\vec{c}$ sa ravni određenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

741.

Odrediti vektor $\vec{r}$ koji zadovoljava uslove $\vec{r} \cdot \vec{i} = 3$ i $\vec{r} \times \vec{i} = -2\vec{k}$.

742.

Dati su vektori $\vec{a}=\{0,\ 2\lambda,\ \lambda\}$, $\vec{b}=\{2,\ 2,\ 1\}$ i $\vec{c}=\{-1,\ -2,\ -1\}$. Odrediti vektor $\vec{r}$ iz uslova:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{r},$$

pa zatim dokazati da su vektori $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$ i $\vec{r}$ komplanarni.

743.

Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ i $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, gdje su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ortovi koji zaklapaju ugao od 30°.

744.

Izračunati površinu trougla čija su tjemena $A(7,\ 3,\ 4)$, $B(1,\ 0,\ 6)$ i $C(4,\ 5,\ -2)$.

745.

Odrediti mješoviti proizvod vektora $\vec{a}=\{2,\ -3,\ 0\}$, $\vec{b}=\{1,\ 1,\ -1\}$ i $\vec{c}=\{3,\ 0,\ -1\}$.

746.

Izračunati zapreminu paralelepipeda koji je određen vektorima:

$$\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\ \text{ i }\ \vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

747.

Tačke $A(0,0,0)$, $B(3,4,-1)$, $C(2,3,5)$ i $D(6,0,-3)$ su vrhovi tetraedra; izračunati zapreminu tetraedra i njegovu visinu spuštenu iz tačke A.

748.

Odrediti parametar t iz uslova da su vektori:

$$\vec{a}=\{\ln(t-2),\ -2,\ 6\},\ \vec{b}=\{t,\ -2,\ 5\}\ \text{i}\ \vec{c}=\{0,\ -1,\ 3\}\ \text{komplanarni.}$$

749.

Odrediti zapreminu tetraedra ako su mu vrhovi:

$$A(3,\ 1,\ -2),\quad B(-4,\ 2,\ 3),\quad C(1,\ 5,\ -1)\ \text{ i }\ D(-5,\ -1,\ 2).$$

Kolika mu je visina ako se za bazu uzme trougao ABC?

8. ANALITIČKA GEOMETRIJA U PROSTORU

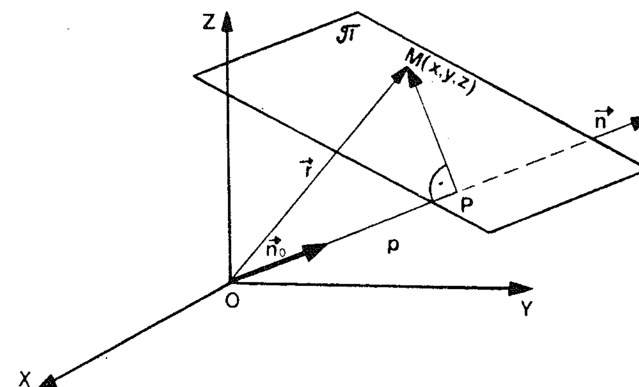
8.1. Ravan

Razmotrimo način na koji možemo neku datu ravan u prostoru analitički prikazati. Pokazaćemo da je to moguće učiniti na razne načine. Ako je u prostoru dat neki Dekartov koordinatni sistem, onda je položaj date ravni u prostoru prema koordinatnom sistemu moguće odrediti na razne načine služeći se pri tom različitim geometrijskim elementima, odnosno raznim geometrijskim veličinama. Odatle i mnoge mogućnosti analitičkih prikaza jedne iste ravni.

8.2. Normalni oblik jednačine ravni

Položaj ravni π u odnosu na prostorni koordinatni sistem najčešće se određuje na sljedeći način. Povučemo kroz koordinatni početak O normalu $\vec{n}=\overrightarrow{OP}$, gdje je P podnožje normale na π.

Sa $\vec{n}_0=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ označimo jedinični vektor normale $\vec{n}$, a vektor položaja proizvoljne tačke $M(x,\ y,\ z)$ koja pripada ravni π sa $\vec{r}=\{x,\ y,\ z\}$. Projekcija vektora položaja $\vec{r}$ proizvoljne tačke M ravni π na vektor $\vec{n}_0$ biće p jer je ΔOMP pravougli (sl. 1).



Sl. 1.

Prema tome za svaku tačku ravni π biće:

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0=p \qquad (1)$$

Dobijena jednačina ravni napisana u vektorskom obliku zove se *normalni* oblik jednačine ravni jer u njoj dolazi do izražaja ort $\vec{n}_0$ normale $\vec{n}$.

U skalarnom obliku ta jednačina ravni glasi:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (2)$$

8.3. Opšti oblik jednačine ravni

Opšti oblik jednačine ravni glasi:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3)$$

Da bismo pokazali da jednačina (3) predstavlja ravan, uvešćemo normalni vektor $\vec{n} = \{A, B, C\}$ ravni π takav da su mu A, B i C projekcije na koordinatne ose i vektor položaja $\vec{r} = \{x, y, z\}$ proizvoljne tačke $M(x, y, z)$, onda za tako uvedene vektore jednačina (3) se može napisati u obliku:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0, \qquad (4)$$

što predstavlja jednačinu ravni.

Ako opštu jednačinu ravni (3), odnosno (4) podijelimo sa $\pm|\vec{n}| = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, dobićemo tu jednačinu ravni napisanu u normalnom obliku:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|} \cdot \vec{r} + \frac{D}{\pm|\vec{n}|} = 0. \qquad (5)$$

Iz činjenice da obje jednačine (5) i (2) predstavljaju normalni oblik iste ravni, to slijede relacije:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm|\vec{n}|}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm|\vec{n}|}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm|\vec{n}|}, \quad p = -\frac{D}{\pm|\vec{n}|}, \qquad (6)$$

sa znakom + ili − ispred $|\vec{n}|$ zavisno od znaka slobodnog člana D jer je $p > 0$.

Proučimo sada položaj ravni u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu kada su neki od koeficijenata opšte jednačine ravni (3) jednaki nuli.

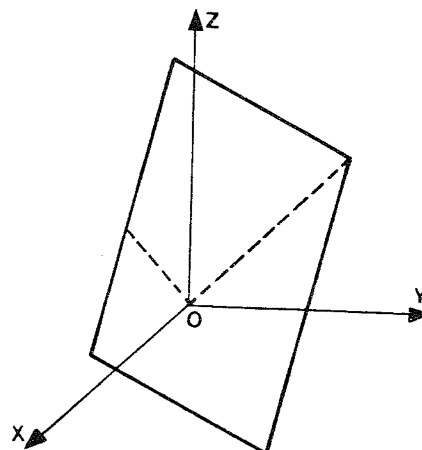
1) Samo jedan koeficijent je jednak nuli.

a) Za $D = 0$ dobija se jednačina ravni $Ax + By + Cz = 0$, koja prolazi kroz koordinatni početak jer koordinate početka $O(0, 0, 0)$ zadovoljavaju navedenu jednačinu (sl. 2).

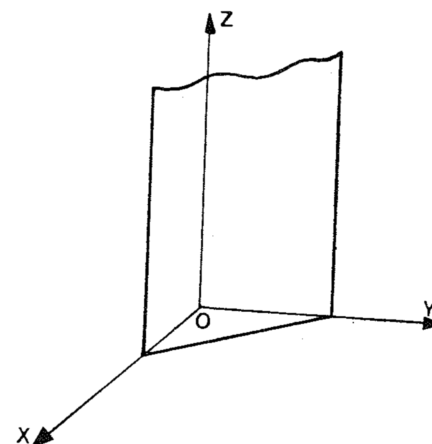
b) Za $C = 0$ dobija se jednačina ravni $Ax + By + D = 0$. U ovom slučaju je $\cos\gamma = \frac{C}{\pm|\vec{n}|} = 0$, pa je vektor $\vec{n}$ normalan na osu OZ, a ravan je paralelna sa osom OZ (sl. 3).

c) Za $B = 0$ dobija se jednačina ravni $Ax + Cz + D = 0$, koja je paralelna osi OY jer je $\cos\beta = 0$ (sl. 4).

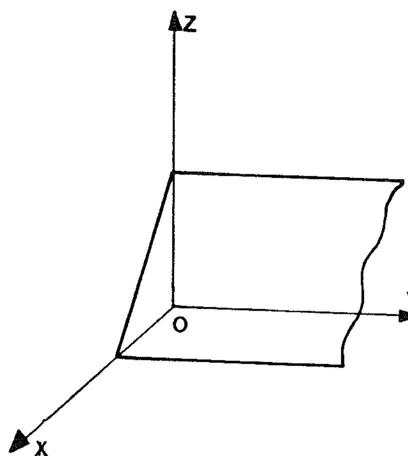
d) Za $A = 0$ dobija se jednačina ravni $By + Cz + D = 0$, koja je paralelna sa osom OX jer je $\cos\alpha = 0$ (sl. 5).



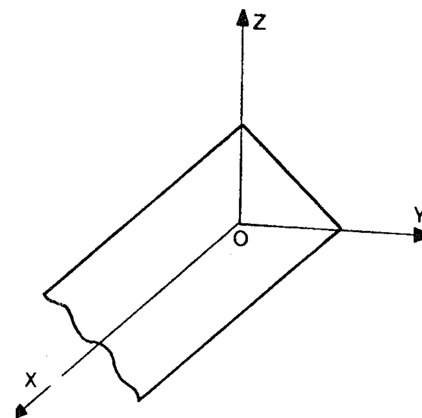
Sl. 2.



Sl. 3.



Sl. 4.



Sl. 5.

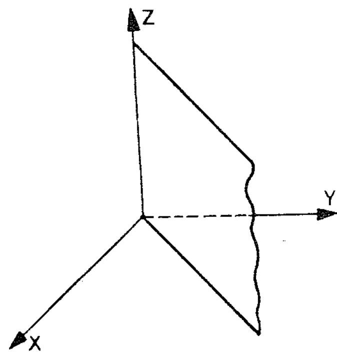
2) Samo dva koeficijenta su jednaka nuli:

a) Za $D = C = 0$ dobija se jednačina ravni $Ax + By = 0$, koja je normalna na ravan XOY i prolazi kroz koordinatni početak jer je $\cos\gamma = 0$ i $p = 0$. Drugim riječima, ova ravan prolazi kroz osu OZ (sl. 6).

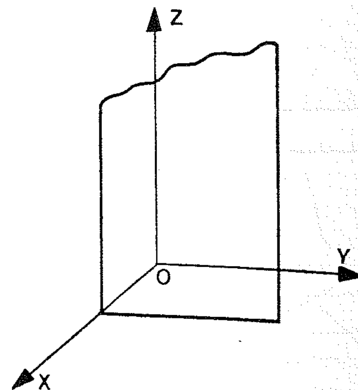
Za druga dva slučaja kada je $D = B = 0$ i $D = A = 0$, dobiće se ravan koja prolazi kroz osu OY odnosno OX jer je uz $p = 0$ u prvom slučaju $\cos\beta = 0$, a u drugom $\cos\alpha = 0$.

b) Kada su dva koeficijenta uz tekuće koordinate jednaka nuli, tada se mogu pojaviti slučajevi:

Za $B=C=0$ jednačina (3) svodi se na $Ax+D=0$. Pod tim uslovom je $\cos\beta=\cos\gamma=0$, te je vektor $\vec{n}$ kolinearan sa vektorom $\vec{i}$, a ravan je paralelna sa koordinatnom ravni YOZ i siječe osu OX u tački čije su koordinate $\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$ (sl. 7).



Sl. 6.



Sl. 7.

Ostale slučajeve kad je $A=B=0$ i $A=C=0$ lako je dalje samostalno izvesti jer se dobijaju ravni paralelne drugim dvjema koordinatnim ravnima.

3) Tri koeficijenta jednaka nuli:
U ovom slučaju ne može se desiti da sva tri koeficijenta uz tekuće koordinate budu jednaka nuli jer bi tada za $A=B=C=0$ trebalo da bude $D=0$, što se protivi pretpostavci.

Kada je $A=B=D=0$ dobićemo jednačinu $Cz=0$ $(C\neq 0)$ koja je u stvari jednačina ravni koja prolazi kroz koordinatni početak, a normalna je na osu OZ. Prema tome, to je jednačina koordinatne ravni XOY.

Slično je za $A=C=D=0$ biće $By=0$, $(B\neq 0)$ što predstavlja jednačinu koordinatne ravni ZOX, a za $B=C=D=0$ dobiće se $Ax=0$, $(A\neq 0)$ a to je jednačina koordinatne ravni YOZ.

8.4. **Uslov paralelnosti i normalnosti dvije ravni**

Ako su ravni:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{i} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

paralelne onda su im normalni vektori $\vec{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ i $\vec{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ kolinearni, pa su im odgovarajuće koordinate proporcionalne, tj.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{7}$$

I obratno, ako vrijedi (7), tada su navedene ravni paralelne.

Ako su pored koeficijenata uz nepoznate i slobodni članovi proporcionalni, tj. ako je:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}, \tag{8}$$

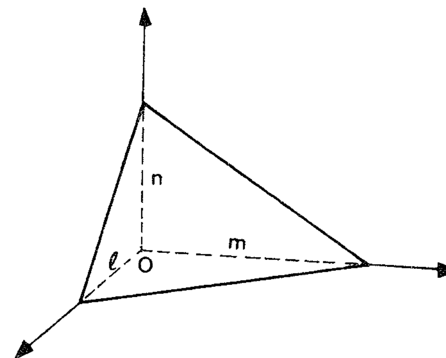
onda se ravni *poklapaju*. I obratno, ako se ravni poklapaju, tada vrijedi (8). Ako su pak, date ravni međusobno *normalne*, onda su i njihovi normalni vektori $\vec{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ i $\vec{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ međusobno normalni, pa im je skalarni proizvod jednak nuli, tj.

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{9}$$

I obratno, ako vrijedi (9), tada su navedene ravni međusobno normalne.

8.5. **Segmentni oblik jednačine ravni**

Ako ravan $Ax+By+Cz+D=0$ nije paralelna ni sa jednom koordinatnom osom, (sl. 8) onda ona od koordinatnih osa odsijeca odsječke:



Sl. 8.

$$l=-\frac{D}{A},\quad m=-\frac{D}{B},\quad n=-\frac{D}{C},$$

pa se jednačina ravni može napisati u takozvanom *segmentnom obliku:*

$$\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1. \tag{10}$$

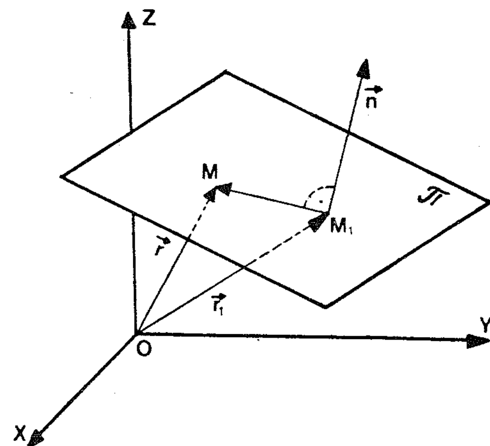
8.6. **Jednačina ravni kroz datu tačku**

Neka je $M_1(x_1, y_1, z_1)$ data tačka u ravni π $(M_1\in\pi)$ sa vektorom položaja $\vec{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$ i M proizvoljna tačka te ravni sa vektorom položaja $\vec{r}=\{x, y, z\}$. Vektor $(\vec{r}-\vec{r}_1)$ leži u ravni π i normalan je na vektor $\vec{n}=\{A, B, C\}$, pa je njihov skalarni proizvod:

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{n}=0. \tag{11}$$

I obratno, ako vrijedi (11) tada tačka M leži u ravni π. Prema tome je jednačina ravni koja prolazi kroz datu tačku M_1. Ta jednačina u skalarnom obliku biće:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (12)$$



Sl. 9.

Jednačinom (12) ravan nije potpuno određena jer se dvije razmjere koeficijenata A, B i C mogu uzeti proizvoljno.

8.7. Jednačina ravni kroz tri tačke

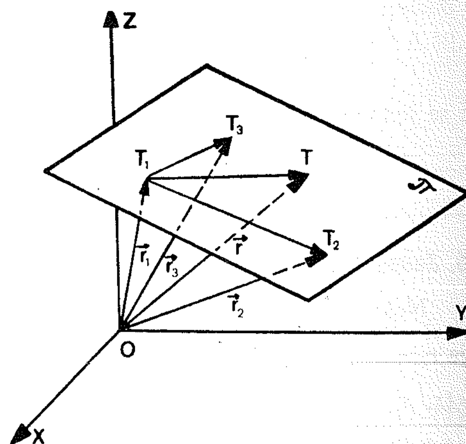
Neka su date tri tačke: $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$ ravni π koje ne leže na jednoj pravoj i čiji su vektori položaja:

$\vec{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{r}_2=\{x_2, y_2, z_2\}$

i

$\vec{r}_3=\{x_3, y_3, z_3\}$.

Te tri tačke u potpunosti određuju jednu ravan, čija je proizvoljna tačka $T(x, y, z)$ sa vektorom položaja $\vec{r}=\{x, y, z\}$ (sl. 10). Vektori: $(\vec{r}-\vec{r}_1)$, $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$, $(\vec{r}_3-\vec{r}_1)$ su *komplanarni* i za njih je mješoviti proizvod jednak nuli, tj.



Sl. 10.

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot[(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times(\vec{r}_3-\vec{r}_1)]=0. \qquad (13)$$

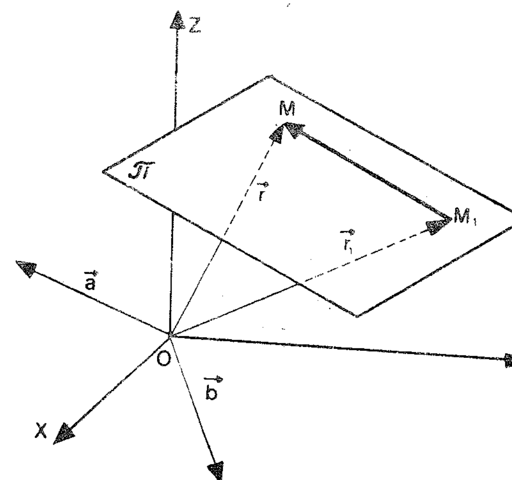
I obratno, ako vrijedi (13), tada su ti vektori komplanarni. Prema tome, (13) predstavlja vektorski oblik jednačine ravni kroz tri tačke.

Odgovarajuća skalarna jednačina je:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (14)$$

8.8. Parametarske jednačine ravni

Neka su $\vec{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ i $\vec{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ dva linearno nezavisna vektora paralelna ravni π (sl. 11), a $\vec{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$ i $\vec{r}=\{x, y, z\}$ vektori položaja



Sl. 11.

date tačke M_1 i proizvoljne tačke M ravni π. Vektori $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su komplanari, pa se jedan od njih može razložiti u pravcu druga dva, na primjer:

$$\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

ili

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}, \qquad (15)$$

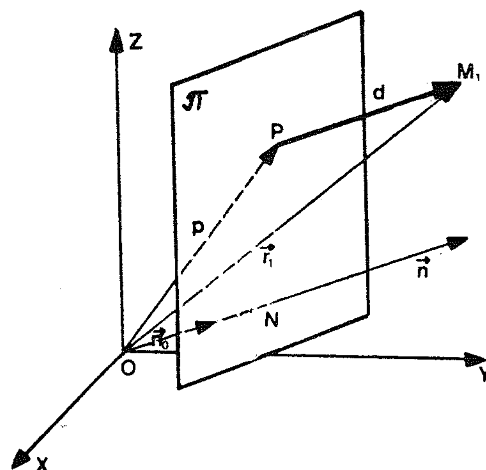
gdje su λ i μ parametri koji se mijenjaju promjenom položaja tačke M u ravni π. Jednačina (15) je, prema tome, jednačina ravni u parametarskom obliku pisana vektorski. Skalarni oblik te jednačine je:

$$x=x_1+\lambda a_1+\mu b_1$$
$$y=y_1+\lambda a_2+\mu b_2 \qquad (16)$$
$$z=x_1+\lambda a_3+\mu b_3.$$

8.9. Rastojanje date tačke od date ravni

Tačka $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ne leži u ravni π, pa njene koordinate neće zadovoljavati jednačinu ravni:

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = p.$$



Sl. 12.

Da bismo našli rastojanje date tačke M_1 od ravni π, povući ćemo kroz tačku M_1 normalu na ravan π i orijentisati je kao i ort $\vec{n}_0$ normale $\vec{n} = \overrightarrow{ON}$. Prodor orijentisane normale spuštene iz tačke M_1 na ravan π označićemo sa P. Onda ćemo imati:

$$\overrightarrow{PM_1} = |\overrightarrow{PM_1}|\,\vec{n}_0 = d\,\vec{n}_0$$

$$\text{pr}_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}_0 = p$$

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM_1}$$

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP} + d\,\vec{n}_0 / \cdot \vec{n}_0$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_0 = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}_0 + d$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_0 = p + d$$

prema tome, rastojanje date tačke od date ravni glasi:

$$d = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}_0 - p. \tag{17}$$

Ako je ravan data u normalnom obliku (2), onda je:

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p. \tag{18}$$

Međutim, ako je jednačina ravni data u opštem obliku, onda odstojanje d glasi:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{19}$$

Ako tačka M_1 i koordinatni početak O leže na raznim stranama ravni π, kao na (sl. 12), onda je $d > 0$, a u protivnom slučaju je $d < 0$.

8.10. Ugao između dvije ravni

Dvije ravni u opštem slučaju sijeku se i presjek im je prava. Tom prilikom se obrazuju četiri prostorna ugla od kojih su dva i dva jednaka. Za ugao presjeka dvije ravni uzima se ugao koji zaklapaju njihovi normalni vektori $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ i $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Prema definiciji ugla koji čine dva vektora biće:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{20}$$

Ako uzmemo znak (+) dobićemo ugao φ, a ako uzmemo znak (−) dobićemo njemu suplementni ugao $(180° - \varphi)$. Pod uglom dvije ravni podrazumijevaćemo manji od ova dva.

8.11. Svežanj ravni

Neka su date dvije neparalelne ravni:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{i} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{21}$$

koje se sijeku po pravoj p. Koordinate tačaka presječene prave p zadovoljavaće i jednu i drugu jednačinu ravni (21). Formiramo li jednačinu:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{22}$$

gdje je λ realni parametar, dobićemo skup ravni koje sve prolaze kroz pravu p. Prema tome, linearna jednačina (22) za proizvoljno izabrano λ, predstavlja jednačinu ravni koja prolazi kroz presjek ravni (21). Skup svih ravni koje se dobiju kad λ varira od $-\infty$ do $+\infty$ zove se *svežanj ravni*, a jednačina (22), koja predstavlja sve te ravni, zove se jednačina svežnja ravni čiji su nosioci ravni (21).

8.12. Snop ravni

Tri ravni:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \end{aligned} \tag{23}$$

imaće za presjek jednu tačku, ako je determinanta sistema (23) različita od nule.

27*

Može se pokazati da svaka ravan oblika:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+$$
$$+\mu(A_3x\,B_3y+C_3z+D_3)=0, \qquad (24)$$

gdje su λ i μ različiti realni parametri, predstavlja ravan koja prolazi kroz zajedničku tačku presjeka ravni (23). Takav skup ravni, koji prolazi kroz presjek tri ravni, zove se *snop ravni*, a zadane tri ravni (23) zovu se nosioci snopa. Iz jednačine (24) vidi se da za određenost pojedine ravni snopa treba imati dva podatka kako bi se odredila dva proizvoljna parametra λ i μ.

750.

Nacrtati u koordinatnom sistemu sljedeće ravni:

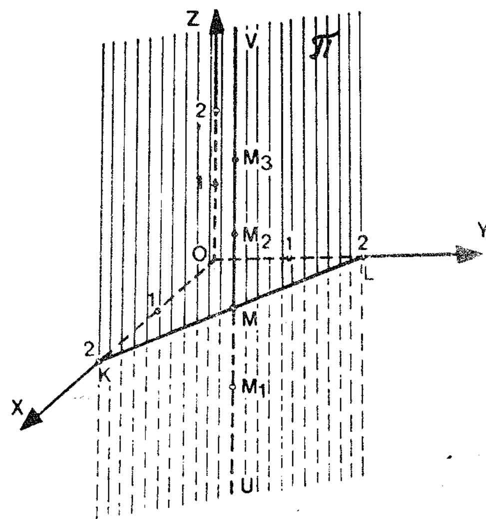
a) $x+y-2=0$, b) $2x-3y=0$, c) $y-3z=0$,

d) $x=0$, e) $y+z=1$, f) $y=1$,

g) $z+5=0$, h) $z=-2x+3$.

Rješenje.

a) Jednačina $x+y-2=0$ predstavlja ravan π (sl. 13) paralelnu osi OZ. Uz ovaj zadatak daćemo i sljedeće objašnjenje: u analitičkoj geometriji ravni, jednačina $x+y-2=0$ predstavlja pravu (KL) (sl. 13). Razjasnićemo zbog čega data jednačina u prostoru predstavlja ravan. U tu svrhu uzimamo na pravoj (KL) proizvoljnu tačku M. S obzirom da M leži u ravni XOY, to je njena aplikata $z=0$. Ako uzmemo da u koordinatnom sistemu XOY tačka



Sl. 13.

M ima koordinate $x=1$ i $y=1$ koje zadovoljavaju jednačinu $x+y-2=0$, tada će u prostornom koordinatnom sistemu $OXYZ$ koordinate tačke M biti $x=1$, $y=1$ i $z=0$.

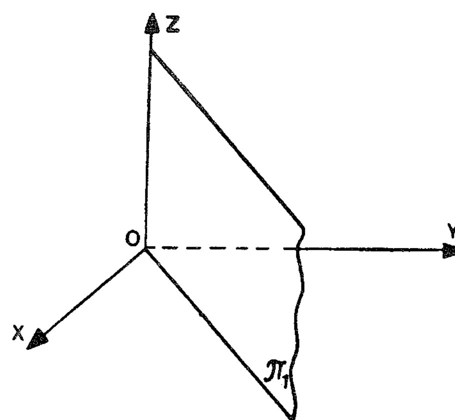
Vidimo da i ove koordinate zadovoljavaju jednačinu $x+y-2=0$. Radi bolje jasnoće, napisaćemo i tu jednačinu u obliku $1\cdot x+1\cdot y+0\cdot z-2=0$ i razmotriti tačke kod kojih je $x=1$, $y=1$ i $z\neq 0$. Neka su to na primjer tačke: $M_1(1,\ 1,\ -1)$, $M_2(1,\ 1,\ 1)$ i $M_3(1,\ 1,\ 2)$ itd. (sl. 13). Koordinate datih tačaka zadovoljavaju jednačinu $x+y+0\cdot z-2=0$. Te tačke leže na vertikalnoj pravoj (UV) koja prolazi kroz tačku M. Takve vertikalne prave je moguće povući kroz sve tačke prave (KL). Skup svih tih pravih nije ništa drugo već ravan π.

b) Jednačina $2x-3y=0$ predstavlja ravan π_1 koja je normalna na ravan XOY i prolazi kroz koordinatni početak (sl. 14).

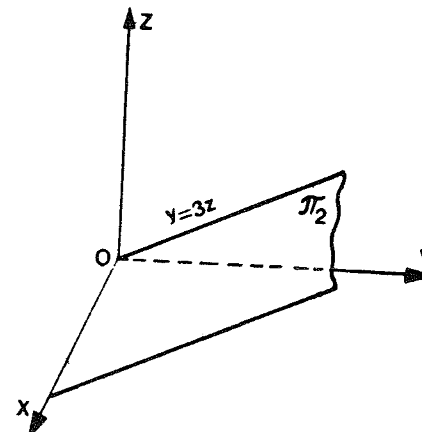
c) Jednačina $y-3z=0$ predstavlja ravan π_2 koja je normalna na ravan YOZ i prolazi kroz koordinatni početak (sl. 15).

d) Jednačina $x=0$ predstavlja koordinatnu ravan YOZ.

e) Jednačina $y+z=1$ predstavlja ravan koja je normalna na ravan YOZ i paralelna osi OX (sl. 16).

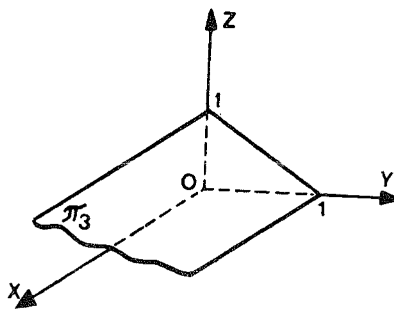


Sl. 14.

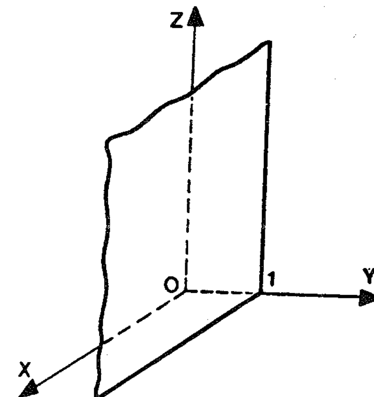


Sl. 15.

f) Jednačina $y=1$ predstavlja ravan paralelnu sa ravni XOZ na rastojanju 1, (sl. 17).

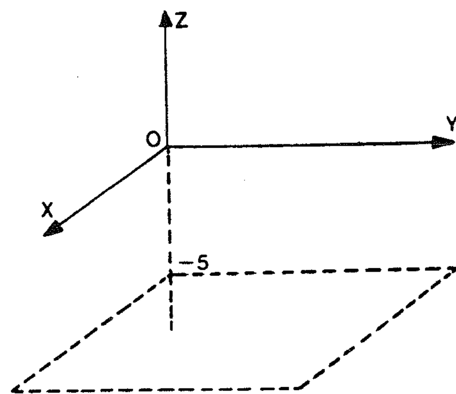


Sl. 16.



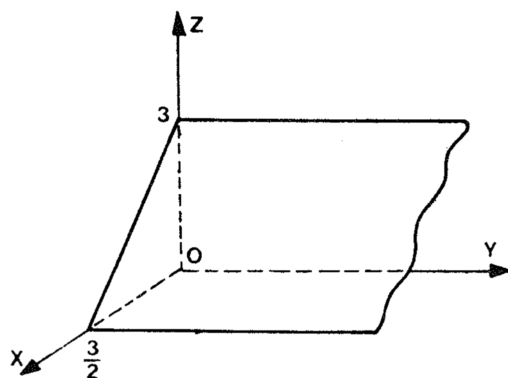
Sl. 17.

g) Jednačina $z+5=0$ predstavlja ravan paralelnu sa ravni XOY a nalazi se ispod nje na udaljenosti 5 (sl. 18).



Sl. 18.

h) Jednačina $z=-2x+3$ predstavlja ravan normalnu na ravan XOZ i paralelnu Y-osi (sl. 19).



Sl. 19.

751.

Kolike odsječke odsijeca ravan $3x+5y-4z-3=0$ od koordinatnih osa?

Rješenje.

$$l=-\frac{D}{A}=-\frac{-3}{3}=1,\quad m=-\frac{D}{B}=-\frac{-3}{5}=\frac{3}{5},$$

$$n=-\frac{D}{C}=-\frac{-3}{-4}=-\frac{3}{4}.$$

752.

Kolike odsječke odsijeca ravan na koordinatnim osama, ako je njeno normalno odstojanje od koordinatnog početka $p=5$ i ako normala ravni zaklapa sa pozitivnim smjerovima koordinatnih osa OX i OY uglove α i β date svojim kosinusima smjerova, $\cos\alpha=\frac{6}{7}$ i $\cos\beta=-\frac{2}{7}$.

Rješenje. Iz relacije $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ slijedi da je: $\cos\gamma=\pm\frac{3}{7}$.

Prema tome, ravni u normalnom obliku glase:

$$\frac{6}{7}x-\frac{2}{y}y\pm\frac{3}{7}z-5=0,$$

ili u segmentnom obliku:

$$\frac{x}{\frac{35}{6}}+\frac{y}{\frac{-35}{2}}+\frac{z}{\pm\frac{35}{3}}=1,$$

te odsječci iznose:

$$a=\frac{35}{6},\quad b=-\frac{35}{2}\ \text{i}\ c=\pm\frac{35}{3}.$$

753.

Napisati jednačinu ravni u normalnom obliku ako na koordinatnim osama odsijeca odsječke $l=105$, $m=-21$ i $n=84$.

Rješenje.

Segmentni oblik jednačine ravni glasi:

$$\frac{x}{105}-\frac{y}{21}+\frac{z}{84}=1,$$

ili u opštem obliku:

$$4x-20y+5z-420=0. \tag{1}$$

Ako normalni oblik jednačine ravni:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{2}$$

uporedimo sa jednačinom (1) dobićemo da je:

$$\cos\alpha=4k,\quad \cos\beta=-20k,\quad \cos\gamma=5k\ \text{i}\ -p=-420k.$$

Ako dobijene vrijednosti za $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ uvrstimo u relaciju:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

dobiće se:

$$16k^2+400k^2+25k^2=1$$

ili

$$k=\frac{1}{21}.$$

Prema tome je.

$$\cos\alpha=\frac{4}{21},\quad \cos\beta=-\frac{20}{21},\quad \cos\gamma=\frac{5}{21}\quad \text{i}\quad p=20.$$

Dakle, normalni oblik tražene jednačine ravni glasi:

$$\frac{4}{21}x-\frac{20}{21}y+\frac{5}{21}z-20=0$$

ili

$$\frac{4x-20y+5z-420}{21}=0.$$

754.

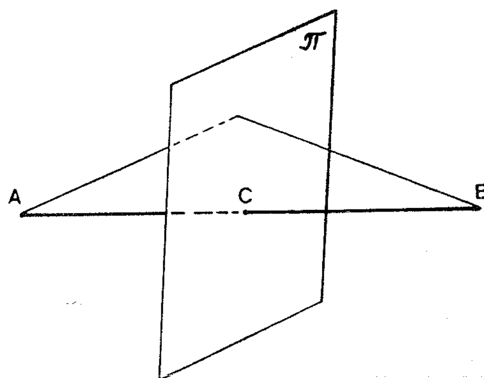
Naći presjeke ravni $x+2y-z-4=0$ sa koordinatnim osama i koordinatnim ravnima.

Rješenje. Ako datu jednačinu svedemo na segmentni oblik:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-4}=1,$$

vidi se da su odsječci na koordinatnim osama $l=4$, $m=2$ i $n=-4$.

Međutim, jednačine presjeka koordinatnih ravni XOY, YOZ i ZOX sa datom ravni su respektivno pravci $x+2y-4=0$, $2y-z-4=0$, $x-z-4=0$.



Sl. 20.

755.

Sastaviti jednačinu ravni u odnosu na koju su tačke $A(4, 0, -3)$ i $B(1, -5, 2)$ simetrične.

Rješenje. Da bi tražena ravan bila takva da date tačke A i B budu simetrične u odnosu na nju, treba da je:

$$d_{AC}=d_{BC}$$

tj.:

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2+(z+3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2+(z-2)^2}.$$

Poslije oslobođenja korijena i zagrada pod korijenom, te sređivanja dobijenog, dobiće se tražena jednačina ravni koja glasi:

$$6x+10y-10z+5=0.$$

756.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi:

a) kroz tačku $K(2, -5, 3)$ i paralelna je sa koordinatnom ravni XOZ,

b) kroz tačku $L(-3, 1, -2)$ i osu OZ,

c) kroz tačke $M(4, 0, -2)$ i $N(5, 1, 7)$, a paralelna je osi OX.

Rješenje.

a) Jednačina ravni koja prolazi tačkom $K(2, -5, 3)$ glasi:

$$A(x-2)+B(y+5)+C(z-3)=0.$$

Pošto je ova ravan paralelna sa ravni XOZ, to je $A=C=0$, pa joj jednačina poprima oblik:

$$B(y+5)=0,$$

odnosno:

$$y+5=0.$$

b) Jednačina ravni koja prolazi tačkom $L(-3, 1, -2)$ glasi:

$$A(x+3)+B(y-1)+C(z+2)=0,$$

tj.:

$$Ax+By+Cz+(3A-B+2C)=0.$$

S obzirom da ona prolazi i kroz osu OZ, to je $3A-B+2C=0$, pa iz jednačine dobijamo da je:

$$Ax+By=0,$$

i

$$3A-B=0.$$

Iz druge jednačine $B=3A$ uvrstimo u prvu dobiće se:

$$Ax+3Ay=0/:A$$

$$x+3y=0.$$

c) Ako tražena ravan $Ax+By+Cz+D=0$ prolazi tačkama $M(4, 0, -2)$ i $N(5, 1, 7)$, onda koordinate tih tačaka zadovoljavaju jednačinu ravni, pa imamo:

$$A(x-4)+By+C(z+2)=0$$

$$A(x-5)+B(y-1)+C(z-7)=0.$$

S obzirom da je tražena ravan paralelna sa osom OX, to je $A=0$, pa dobijamo:

$$By+C(z+2)=0 \qquad (1)$$

$$B(y-1)+C(z-7)=0, \qquad (2)$$

odnosno:

$$By+Cz=-2C$$

$$By+Cz=7C+B,$$

odakle slijedi da je:

$$-2C=7C+B$$

tj.:

$$B=-9C.$$

Uvrstimo li dobijenu vrijednost $B=9C$ u jednačinu (1) dobiće se:

$$-9Cy+C(z+2)=0/:C$$

tj.:

$$-9y+z+2=0.$$

757.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $A(2, 1, -1)$ i normalna je na vektor $\vec{a}=\{1, -2, 3\}$.

Rješenje. Jednačinu ravni kroz tačku $A(2, 1, -1)$ glasi:

$$A(x-2)+B(y-1)+C(z+1)=0. \qquad (1)$$

S obzirom da je ravan (1) normalna na vektor $\vec{a}=\{1, -2, 3\}$ to je njen normalni vektor $\vec{n}=\{A, B, C\}$ kolinearan sa $\vec{a}$, pa su im koordinate proporcionalne, tj.:

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{-2}=\frac{C}{3}=\lambda,$$

odnosno:

$$A=\lambda,\ B=-2\lambda,\ C=3\lambda.$$

Ako dobijene vrijednosti za A, B i C uvrstimo u jednačinu (1) dobićemo:

$$\lambda(x-2)-2\lambda(y-1)+3\lambda(z+1)=0/:\lambda$$

$$x-2y+3z+3=0.$$

758.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $A(3, 4, -5)$ i paralelna je sa vektorima $\vec{a}=\{3, 1, -1\}$ i $\vec{b}=\{1, -2, 1\}$.

Rješenje. Jednačina ravni kroz datu tačku A glasi:

$$A(x-3)+B(y-4)+C(x+5)=0.$$

S obzirom da je ova ravan paralelna sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, to je njen normalni vektor $\vec{n}=\{A, B, C\}$ normalan sa njima, pa su njihovi skalarni proizvodi jednaki nuli, tj.

$$3A+B-C=0$$

$$A-2B+C=0$$

tj.:

$$B=4A,\quad C=7A.$$

Prema tome, tražena jednačina ravni glasi:

$$A(x-3)+4A(y-4)+7A(z+5)=0/:A$$

tj.

$$x+4y+7z+16=0.$$

759.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $A(7, -5, 1)$ i odsijeca na koordinatnim osama jednake odsječke.

Rješenje. Jednačina ravni kroz datu tačku glasi:

$$A(x-7)+B(y+5)+C(z-1)=0.$$

Pošto ova ravan odsijeca jednake odsječke na koordinatnim osama, biće: $A=B=C$, tj.

$$A(x-7)+A(y+5)+A(z-1)=0/:A$$

$$x+y+z-3=0.$$

760.

Sastaviti jednačinu ravni čiji je odsječak na osi OZ jednak -5, a normalna je na vektor $\vec{a}=\{-2, 1, 3\}$.

Rješenje. Iz relacija za odsječak $p=-\dfrac{D}{C}$ na osi OZ dobijamo:

$$-5=-\frac{D}{C},\ \text{tj.}\ D=5C.$$

Međutim, pošto je ravan normalna na vektor $\vec{a}$, to je njen normalni vektor $\vec{n}=\{A, B, C\}$ kolinearan sa vektorom $\vec{a}$, pa su im koordinate proporcionalne, tj.:

$$A=-2\lambda,\quad B=\lambda \text{ i } C=3\lambda, \text{ pa je } D=5C=15\lambda.$$

Iz opšte jednačine ravni $Ax+By+Cz+D=0$ dobija se:

$$-2\lambda x+\lambda y+3\lambda z+15\lambda=0/:(-\lambda)$$

tj.:

$$2x-y-3z-15=0.$$

761.

Sastavite jednačinu ravni koja je od koordinatnog početka udaljena za 6 jedinica i čiji su odsječci na koordinatnim osama vezani relacijom $l:m:n=1:3:2$.

Rješenje. Iz date proporcije dobija se:

$$l:m=1:3$$

$$l:n=1:2$$

tj.

$$m=3l \quad \text{i} \quad n=2l.$$

Smjenom dobijenih vrijednosti za m i n u segmentni oblik jednačine ravni:

$$\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}=1$$

imaćemo:

$$\frac{x}{l}+\frac{y}{3l}+\frac{z}{2l}=1/\cdot 6l$$

$$6x+2y+3z-6l=0.$$

Iz relacije za udaljenost dobijene ravni od koordinatnog početka odredićemo veličinu m, tj.:

$$d=\frac{|-6l|}{\pm\sqrt{36+4+9}}=6.$$

$$l=\pm 7.$$

Prema tome, tražena jednačina ravni glasi:

$$6x+2y+3z\mp 42=0.$$

762.

Naći odstojanje između ravni $11x-2y-10z+15=0$ i $11x-2y-10z-45=0$.

Rješenje. Iz datih jednačina vidi se da su ravni paralelne jer su im koeficijenti uz nepoznate jednaki. Da bismo odredili njihovu udaljenost, potrebno je odabrati na jednoj ravni neku tačku, pa onda tražiti odstojanje te tačke od druge ravni.

Tu proizvoljnu tačku dobijamo kada za x i y u jednoj od ravni damo proizvoljne vrijednosti, a onda z odredimo. U našem slučaju uzmimo za $x=-1$, $y=2$ i uvrstimo u prvu jednačinu, dobićemo da je $z=0$. Rastojanje dobijene tačke $(-1, 2, 0)$ od druge ravni $11x-2y-10z-45=0$ iznosi:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=4.$$

763.

Izračunati visinu H_S piramide čiji su vrhovi u tačkama

$$S(0, 6, 4),\ A(3, 5, 3),\ B(-2, 11, -5) \text{ i } C(1, -1, 4).$$

Rješenje. Rješenje problema se svodi na određivanje odstojanja tačke vrha S od ravni baze piramide određene tačkama A, B i C. Jednačina ravni kroz tačke A, B i C glasi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}=0$$

tj.

$$2x-y-2z+5=0.$$

Prema tome, visina H_S biće jednaka udaljenosti tačke $S(0, 6, 4)$ od ravni baze $2x-y-2z+5=0$ i iznosi:

$$H_S=d=\left|\frac{Ax_S+By_S+Cz_S+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=3.$$

764.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatni početak i normalna je na ravnima $2x-y+5z+3=0$ i $x+3y-z-7=0$.

Rješenje. Jednačina ravni kroz koordinatni početak glasi:

$$Ax+By+Cz=0. \qquad (1)$$

Pošto je ona normalna na date dve ravni, to je i njen normalni vektor $\vec{n}=\{A, B, C\}$ normalan na normalnim vektorima $\vec{n_1}=\{2, -1, 5\}$ i $\vec{n_2}=\{1, 3, -1\}$ datih ravni, pa su njihovi skalarni proizvodi jednaki nuli, tj.:

$$2A-B+5C=0$$

$$A+3B-C=0,$$

odakle dobijamo da je $C=B$ i $A=-2B$.

Uvrstimo li dobijene vrijednosti za C i A u relaciju (1), dobićemo traženu jednačinu ravni koja glasi:

$$-2Bx + By + Bz = 0 / : (-B) \qquad (B \neq 0)$$

tj.:

$$2x - y - z = 0.$$

765.

Odrediti parametre m i n tako da ravni:

$$2x + my + 3z - 5 = 0$$

$$nx - 6y - 6z + 2 = 0 \quad \text{budu paralelne.}$$

Rješenje. Da bi date ravni bile paralelne, potrebno je da su im koeficijenti uz nepoznate proporcionalni, tj.:

$$\frac{2}{n} = \frac{m}{-6} = \frac{3}{-6},$$

odakle se dobija da je $m = 3$ i $n = -4$.

766.

Sastaviti jednačinu ravni koja je paralelna sa ravni $3x - 6y - 2z + 14 = 0$ i udaljena je od nje za 3 jedinice.

Rješenje. Pošto tražena ravan treba da bude paralelna datoj ravni, to će im koeficijenti uz promjenljive x, y, z biti proporcionalni, pa će tražena jednačina ravni da glasi:

$$3\lambda x - 6\lambda y - 2\lambda z + D = 0, \quad \lambda \neq 0. \qquad (1)$$

Slobodni član D odredićemo iz uslova da je odstojanje između date i tražene ravni (1) jednako 3 jedinice, tj.:

$$3 = \frac{6\lambda - 6\lambda - 14\lambda + D}{\pm\sqrt{9\lambda^2 + 36\lambda^2 + 4\lambda^2}}$$

$$3 = \frac{-14\lambda + D}{\pm 7\lambda}$$

$$\pm 21\lambda = -14\lambda + D$$

$$D_1 = 35\lambda, \quad D_2 = -7\lambda.$$

Dobili smo dvije vrijednosti za slobodni član D jer postoje dvije ravni koje su paralelne datoj ravni i to jedna udaljena za 3 jedinice sa jedne, a druga sa druge strane date ravni. Prema tome, jednačine tih ravni glase:

$$3\lambda x - 6\lambda y - 2\lambda z + 35\lambda = 0 / : \lambda$$

$$3\lambda x - 6\lambda y - 2\lambda z - 7\lambda = 0 / : \lambda$$

tj.:

$$3x - 6y - 2z + 35 = 0$$

$$3x - 6y - 2z - 7 = 0.$$

767.

Odrediti parametar λ tako da ravni:

$$3x - 5y + \lambda z - 3 = 0$$

$$x + 3y + 2z + 5 = 0, \quad \text{budu normalne jedna na drugu.}$$

Rješenje. Da bi dvije ravni bile međusobno normalne, treba da njihovi koeficijenti uz nepoznate udovoljavaju uslov:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0,$$

tj.

$$3 - 15 + 2\lambda = 0,$$

pa je:

$$\lambda = 6.$$

768.

Odrediti geometrijsko mjesto tačaka jednako udaljenih od ravnina $2x - 3y - 4z - 3 = 0$ i $4x - 3y - 2z - 3 = 0$.

Rješenje. Traženo geometrijsko mjesto tačaka se određuje iz uslova da je njegova bilo koja tačka (x, y, z) podjednako udaljena od obje date ravni, tj.:

$$\frac{2x - 3y - 4z - 3}{\sqrt{29}} = \frac{4x - 3y - 2z - 3}{\sqrt{29}},$$

a to je ravan:

$$x + z = 0.$$

769.

Koliki ugao zaklapaju dvije ravni koje prolaze tačkom $M(-5, 16, 12)$ od kojih jedna ide kroz osu OX, a druga kroz osu OY?

Rješenje. Jednačina ravni koja prolazi kroz osu OX glasi:

$$By + Cz = 0.$$

Kako ova ravan prolazi i tačkom M, to će njene koordinate zadovoljavati jednačinu ravni, pa će biti:

$$16B + 12C = 0,$$

odnosno:

$$B = -\frac{3C}{4}.$$

Prema tome jednačina tražene ravni će biti:

$$-\frac{3}{4}Cy + Cz = 0 / : C$$

tj.

$$3y - 4z = 0. \qquad (1)$$

Sličnim rezonovanjem dolazimo i do druge jednačine ravni koja prolazi kroz osu OY, tj. njena jednačina glasi:

$$12x + 5z = 0. \qquad (2)$$

Prema tome, traženi ugao kojeg zaklapaju ravni (1) i (2) glasi:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \pm\frac{4}{13}.$$

770.

Kako glasi jednačina ravni koja prolazi tačkama $M(3, -5, 1)$ i $N(4, 1, 2)$, a normalna je na ravan $x - 8y + 3z - 1 = 0$?

Rješenje. Jednačina tražene ravni glasi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Kako ravan (1) prolazi tačkama M i N, to će njihove koordinate zadovoljavati jednačinu, pa ćemo dobiti dvije jednačine:

$$3A - 5B + C + D = 0 \qquad (2)$$

$$4A + B + 2C + D = 0. \qquad (3)$$

Pošto je ravan (1) još i normalna na datu ravan, to će ona zadovoljavati i uslov normalnosti:

$$A - 8B + 3C = 0. \qquad (4)$$

Dakle, dobili smo četiri homogene jednačine sa četiri nepoznate A, B, C i D. Da bi ovaj sistem imao netrivijalno rješenje, mora determinanta sistema biti jednaka nuli, tj.:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijanjem determinante dolazimo do tražene jednačine ravni koja glasi:

$$13x - y - 7z - 37 = 0.$$

771.

Iz pramena ravni:

$$2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0,$$

izdvojiti onu ravan koja:

a) prolazi kroz tačku $M(1, -2, 3)$,

b) je paralelna sa osom OX.

Rješenje.

a) Pošto tačka M leži na traženoj ravni datog pramena, to će njene koordinate zadovoljiti jednačinu te ravni pramena, tj.

$$2 + 6 + 3 - 3 + \lambda(1 - 6 + 6 + 1) = 0$$

$$\lambda = -4.$$

Traženu jednačinu ravni ćemo dobiti kada vrijednost za $\lambda = -4$ uvrstimo u jednačinu datog pramena ravni, tj.:

$$2x - 3y + z - 3 - 4(x + 3y + 2z + 1) = 0$$

odnosno:

$$2x + 15y + 7z + 7 = 0.$$

b) Da bismo iz datog pramena izdvojili ravan koja je paralelna sa osom OX, potrebno je pramen napisati u obliku:

$$(2 + \lambda)x + (-3 + 3\lambda)y + (1 + 2\lambda)z + (-3 + \lambda) = 0.$$

S obzirom da je ravan paralelna sa osom OX, to je koordinata $A = 2 + \lambda$ njenog normalnog vektora jednaka nuli, tj. $2 + \lambda = 0$, odnosno $\lambda = -2$.

Smijenimo li dobijenu vrijednost za λ u datu jednačinu pramena ravni, dobićemo traženu ravan:

$$2x - 3y + z - 3 - 2(x + 3y + 2z + 1) = 0$$

tj.

$$9y + 3z + 5 = 0.$$

772.

Odrediti parametre a i b tako da ravan:

$$5x + ay + 4z + b = 0 \quad \text{pripada pramenu ravni:}$$

$$\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0.$$

Rješenje. Da bi data ravan pripadala datom pramenu, u tom pramenu mora postojati ravan sa kojom se data ravan poklapa. To znači da su koordinate njihovih normalnih vektora i slobodni članovi jednaki. Iz tog uslova odredićemo kako parametre α i β, tako i a i b.

U tu svrhu napišimo jednačinu datog pramena u obliku:

$$(3\alpha+\beta)x+(-7\alpha-9\beta)y+(\alpha-2\beta)z+(-3\alpha+5\beta)=0$$

i jednačinu date ravni:

$$5x+ay+4z+b=0.$$

Iz ove dvije jednačine slijedi da je:

$$3\alpha+\beta=5 \quad (1) \qquad \alpha-2\beta=4 \quad (3)$$

$$-7\alpha-9\beta=a \quad (2) \qquad -3\alpha+5\beta=b \quad (4)$$

Iz jednačina (1) i (3) dobija se da je $\alpha=2$ i $\beta=-1$. Smjenom dobijenih vrijednosti za α i β u jednačine (2) i (4) dobijamo da je $a=-5$ i $b=-11$.

773.

Iz pramena: $\alpha(4x+13y-2z-60)+\beta(4x+3y+3z-30)=0$ izdvojiti onu ravan koja od koordinatnog ugla XOY odsijeca trougao površine 6 kvadratnih jedinica.

Rješenje. Površina trougla koju odsijeca tražena ravan datog pramena može biti pozitivna ili negativna (zašto?). Prema tome je:

$$p_{\Delta}=\pm\frac{a\cdot b}{2}=6 \qquad (1)$$

gdje je: a odsječak na osi OX, b na osi OY.

Iz jednačine pramena za $y=0$ i $z=0$ dobićemo odsječak na osi OX, tj.:

$$\alpha(4x-60)+\beta(4x-30)=0$$

$$x=\frac{60\alpha+30\beta}{4\alpha+4\beta}=a, \qquad (2)$$

dok za $x=0$ i $z=0$ dobićemo odsječak na osi OY, tj.:

$$\alpha(13y-60)+\beta(3y-30)=0$$

pa je

$$y=\frac{60\alpha+30\beta}{13\alpha+3\beta}=b. \qquad (3)$$

Smjenom vrijednosti a i b u relaciji (1) dobijamo da je:

$$\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{60\alpha+30\beta}{4\alpha+4\beta}\cdot\frac{60\alpha+30\beta}{13\alpha+3\beta}=6$$

$$\pm\frac{1}{2}\cdot 900\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(13\alpha+3\beta)}=6$$

$$\pm 450(4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)=6\cdot 4(\alpha+\beta)(13\alpha+3\beta)/:6$$

$$\pm 75(4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)=52\alpha^2+64\alpha\beta+12\beta^2.$$

Iz posljednje relacije dobijaju se dve jednačine i to:

$$300\alpha^2+300\alpha\beta+75\beta^2-52\alpha^2-64\alpha\beta-12\beta^2=0 \qquad (4)$$

$$-300\alpha^2-300\alpha\beta-75\beta^2-52\alpha^2-64\alpha\beta-12\beta^2=0 \qquad (5)$$

Iz relacije (4) dobijamo da je:

$$284\alpha^2-236\alpha\beta+63\beta^2=0/:\beta^2$$

$$284\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-236\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+63=0$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{1,2}=\frac{118\pm i\sqrt{1700}}{284}.$$

Prema tome, nema realnog rješenja.

Iz relacije (5) dobijamo pak, jednačinu:

$$-352\alpha^2-364\alpha\beta-87\beta^2=0/:(-\beta^2)$$

$$352\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+364\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)-87=0$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{3,4}=\frac{-364\pm100}{704}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_3=-\frac{3}{8}, \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4=-\frac{29}{44}.$$

Iz dobijenih vrijednosti za $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ proizilazi da postoje dva rješenja, i to:

1) za $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{3}{8}$ slijedi da je $\alpha=-\frac{3}{8}$, pa tražena ravan glasi:

$$-\frac{3}{8}\beta(4x+13y-2z-60)+\beta(4x+3y+3z-30)=0/\cdot\left(-\frac{8}{\beta}\right)$$

tj.

$$4x-3y+6z-12=0.$$

2) Za $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{29}{44}$ slijedi da je $\alpha=-\frac{29}{44}\beta$, pa druga tražena ravan glasi:

$$-\frac{29}{44}\beta(4x+13y-2z-60)+\beta(4x+3y+3z-30)=0/\cdot\left(\frac{44}{\beta}\right)$$

tj.

$$12x-49y+38z+84=0.$$

8.13. **Prava**

Razmotrićemo način na koji možemo neku pravu u prostoru analitički predočiti. Pokazaće se da je to moguće na veoma različite načine. Ako je, naime, u prostoru dat neki Dekartov koordinatni sistem, položaj date prave u tom prostoru prema koordinatnom sistemu moguće je odrediti, kao i ravan što smo određivali, na razne načine služeći se pri tome različitim geometrijskim elementima, odnosno raznim geometrijskim veličinama. Odatle i mnoge mogućnosti analitičkih prikaza jedne iste prave.

8.14. **Opšti oblik jednačine prave**

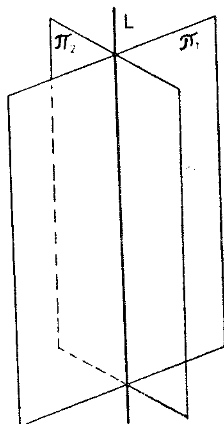
Neka prava L u prostoru, može biti određena kao presjek bilo koje dvije ravni π_1 i π_2, koje tom pravom prolaze (sl. 21). U tom slučaju na pravoj L leže sve one tačke prostora koje leže u obje ravni:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{1}$$

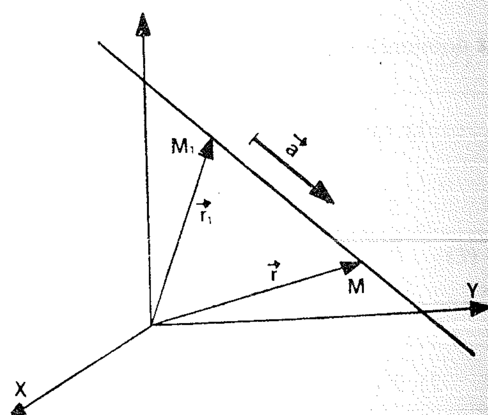
Prema tome, sistem jednačina (1) određuje pravu u prostoru. Pri tome mora biti ispunjen uslov da njihovi normalni vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ nisu kolinearni. Jednačina (1) zove *se opšta jednačina prave.*

8.15. **Parametarski oblik jednačine prave**

Neka je u prostoru data neka prava L i neka određena tačka na toj pravoj $M_1(x_1, y_1, z_1)$ čiji je vektor položaja $\vec{r}_1$. Takođe, neka je dat i neki vektor $\vec{a}=\{p, q, s\}$ koji određuje smjer te prave (sl. 22). Ako je sada



Sl. 21.



Sl. 22.

$M(x,y,z)$ bilo koja tačka te prave, vektora položaja $\vec{r}$, tada je vektor $\overrightarrow{M_1M}\|\vec{a}$

tj.

$$\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda\vec{a}$$

ili

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda\vec{a}, \tag{2}$$

što predstavlja *vektorsku jednačinu prave* u parametarskom obliku. Ako u jednačini (2) zamijenimo vektore $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ i $\vec{a}$ njihovim koordinatama dobiće se:

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x_1+\lambda p)\vec{i}+(y_1+\lambda q)\vec{j}+(z_1+\lambda s)\vec{k}$$

tj.

$$x=x_1+\lambda p$$
$$y=y_1+\lambda q \tag{3}$$
$$z=z_1+\lambda s.$$

Jednačine (3) su parametarske jednačine prave u skalarnom obliku. Ako iz jednačina (3) eliminišemo parametar λ, dobićemo dvije skalarne jednačine koje možemo pisati u obliku jedne dvostruke jednačine ovako:

$$\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{s}. \tag{4}$$

Jednačine (4) zovu se *kanonske jednačine* prave određene tačkom $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i vektorom smjera $\vec{a}=\{p, q, s\}$.

Da bismo jednačine prave date u opštem obliku (1) preveli na kanonski oblik, treba na pravoj uzeti bilo koju tačku (x_1, y_1, z_1) koja se dobije kada proizvoljno zadamo x_1, onda odredimo y_1 i z_1. Koordinate vektor smjera p, q i s određujemo iz uslova da je on normalan na normalne vektore presječenih ravni, tj:

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

gdje je.:

$$p=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\quad q=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix},\quad s=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

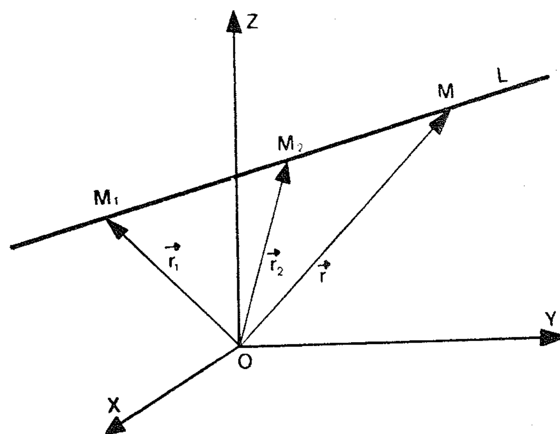
8.16. **Jednačine prave kroz dvije date tačke**

Neka je prava L u prostoru određena kao spojnica dvije tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (sl. 23).

U tom slučaju će vektor $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ poslužiti kao vektor smjera ove prave, pa je tako problem analitičkog određivanja prave koja prolazi kroz

dvije date tačke M_1 i M_2 sveden na prethodni slučaj iz tačke (8.15). Prema tome, jednačina prave L prema relaciji (2) glasi:

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\lambda(\vec{r}_2-\vec{r}_1). \tag{5}$$



Sl. 23.

Ovoj vektorskoj parametarskoj jednačini ekvivalentan je sistem skalarnih jednačina:

$$\begin{aligned} x&=x_1+\lambda(x_2-x_1)\\ y&=y_1+\lambda(y_2-y_1)\\ z&=z_1+\lambda(z_2-z_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Eliminacijom parametra λ iz (6) dobijamo jednačine prave L kroz date tačke u obliku:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{7}$$

8.17. **Ugao između dvije prave**

Neka su date dvije prave L_1 i L_2, definisane jednačinama:

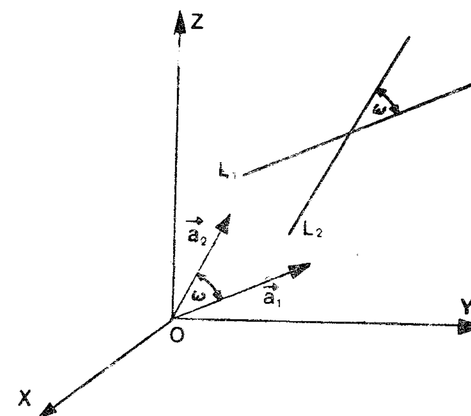
$$\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{s_1}, \quad \frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{s_2}$$

koje su orijentisane kao njihovi korespondentni vektori:

$$\vec{a}_1=\{p_1, q_1, s_1\} \text{ i } \vec{a}_2=\{p_2, q_2, s_2\}.$$

Ugao između tih pravih je ugao između vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ kojima smo zajednički početak uzeli u tački O (sl. 24). Ako je: $\sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)=\omega$ onda je:

$$\cos\omega=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\,|\vec{a}_2|}$$



Sl. 24.

odnosno:

$$\cos\omega=\frac{p_1p_2+q_1q_2+s_1s_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+s_1^2}\,\sqrt{p_2^2+q_2^2+s_2^2}}, \tag{8}$$

obrazac za izračunavanje ugla.

Ako su prave L_1 i L_2 paralelne, vektori $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ su kolinearni, pa je:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{s_1}{s_2},$$

i obratno, ako je ispunjen taj uslov prave L_1 i L_2 su paralelne.

Ako su prave L_1 i L_2 međusobno normalne, vektori $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$ su takođe međusobno normalni, pa je:

$$p_1p_2+q_1q_2+s_1s_2=0$$

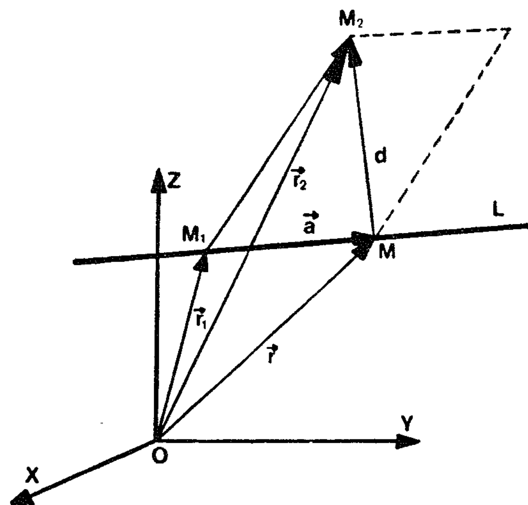
i obratno, ako je ispunjen taj uslov prave su međusobno normalne.

8.18. **Odstojanje tačke od prave**

Pod odstojanjem date tačke M_2 od date prave L_1 podrazumijeva se udaljenost te tačke od njene normalne projekcije M na datoj pravoj.

Da bismo odredili ovu udaljenost d uzmimo da je $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M}$ vektor smjera date prave (sl. 25). Tada će rastojanje d biti visina paralelograma zahvaćenog vektorima $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M}$ i $\overrightarrow{M_1M_2}$. Površina tog paralelograma biće:

$$p=|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}|. \tag{9}$$



Sl. 25.

Sa druge strane, prema elementarnoj geometriji formula za površinu paralelograma je:

$$p=|\vec{a}|\cdot d. \tag{10}$$

Iz relacije (9) i (10) dobijamo da je:

$$|\vec{a}|\cdot d=|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}|$$

tj.

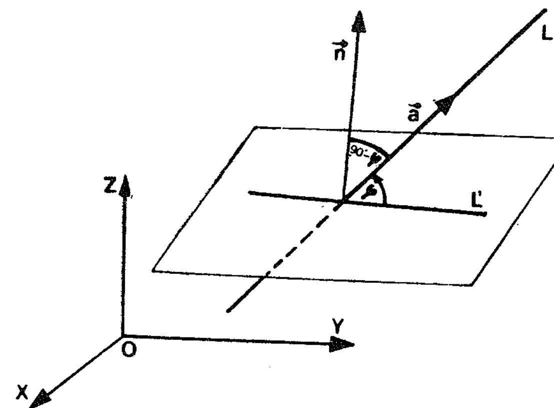
$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|},$$

ili pomoću vektora položaja $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ tačaka M_1 i M_2 biće:

$$d=\frac{|(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}. \tag{11}$$

8.19. Ugao između prave i ravni

Ugao φ između prave L i ravni π je komplementan ugao uglu između vektora smjera $\vec{a}=\{p, q, r\}$ prave L i normalnog vektora $\vec{n}=\{A, B, C\}$ ravni π (sl. 26).



Sl. 26.

Prema tome je:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=|\vec{a}|\;|\vec{n}|\cos(90^0-\varphi)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=|\vec{a}|\;|\vec{n}|\sin\varphi$$

$$\sin\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}|\;|\vec{n}|},$$

ili u koordinatama

$$\sin\varphi=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+s^2}}. \tag{13}$$

Ako su prava L i ravan π paralelne, vektori $\vec{a}$ i $\vec{n}$ su međusobno normalni, pa je:

$$Ap+Bq+Cs=0,$$

i obratno, ako je ispunjen taj uslov, prava i ravan su paralelne.

Ako su prava i ravan međusobno normalne, vektori $\vec{a}$ i $\vec{n}$ su kolinearni, pa je:

$$\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{s}$$

i obratno, ako postoji taj uslov, prava i ravan su međusobno normalne.

8.20. **Prodor prave u ravan**

Ako su date jednačine prave L:

$$\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{s}$$

i ravni:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

onda se njihov presjek određuje rješenjem sistema tri navedene jednačine. Riječ je ustvari o presjeku tri ravni, od kojih dvije određuju pravu L, a treća je ravan π. Rješenje tog sistema jednačina biće:

$$x=x_1-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ap+Bq+Cs}\cdot p \qquad y=y_1-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ap+Bq+Cs}\cdot q$$

$$z=z_1-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ap+Bq+Cs}\cdot s. \tag{14}$$

Na osnovu dobijenog rezultata za tačku prodora, vidimo da se ona uvijek može odrediti kada je $\vec{a}\cdot\vec{n}\neq 0$, tj. kada prava nije paralelna ravni.

8.21. **Presjek dvije prave**

Neka su date dvije prave:

$$\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{s_1} \text{ i } \frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{s_2} \tag{15}$$

Ako ove prave napišemo u parametarskom obliku:

$$x=x_1+\lambda_1 p_1 \qquad y=y_1+\lambda_1 q_1 \qquad z=z_1+\lambda_1 s_1 \tag{16}$$

$$x=x_2+\lambda_2 p_2 \qquad y=y_2+\lambda_2 q_2 \qquad z=z_2+\lambda_2 s_2, \tag{17}$$

pa jednačine (17) oduzmemo od jednačine (16), dobićemo sistem od tri linearne jednačine po λ_1 i λ_2:

$$\lambda_1 p_1-\lambda_2 p_2=x_2-x_1$$

$$\lambda_1 q_1-\lambda_2 q_2=y_2-y_1$$

$$\lambda_1 s_1-\lambda_2 s_2=z_2-z_1. \tag{18}$$

Da bi sistem (18) imao rješenje, treba da je eliminanta sistema jednaka nuli, tj. da je:

$$\begin{vmatrix} p_1 & -p_2 & x_2-x_1 \\ q_1 & -q_2 & y_2-y_1 \\ s_1 & -s_2 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Na osnovu poznatih osobina determinanti može se dobijena determinanta napisati i ovako:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & s_2 \end{vmatrix}=0. \tag{19}$$

Ako je ovaj uslov ispunjen, prave se sijeku, pa se onda iz dvije od tri jednačine (18) može odrediti λ_1 i λ_2. Ako uvrstimo dobijene vrijednosti za λ_1 i λ_2 u jednačine (16) ili (17) dobićemo koordinate presječene tačke x, y i z.

774.

Ispitati položaj sljedećih pravih u odnosu na Dekartov koordinatni sistem u prostoru:

a) $A_1x+B_1y+C_1z=0$, $A_2x+B_2y+C_2z=0$ — Data prava prolazi kroz koordinatni početak jer i ravni koje je određuju prolaze kroz koordinatni početak.

b) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $B_1B_2y+D_2=0$ — Prava je paralelna sa XOZ ravni jer je druga od dvije date ravni koje je određuju, paralelna XOZ ravni.

c) $A_1x+D_1=0$, $B_2y+D_2=0$ — Prava je paralelna sa osom OZ jer su obje ravni koje određuju pravu paralelne osi OZ.

d) $Ax+By+Cz+D=0$, $A_1x+By+Cz+D=0$. — Data prava leži u ravni YOZ jer su date jednačine ekvivalentne jednačinama $By+Cz+D=0$ i $x=0$. Da bismo to pokazali, napišimo date ravni koje definišu pravu u obliku:

$$Ax=-(By+Cz+D)$$

$$A_1x=-(By+Cz+D).$$

Pošto su im desne strane jednake to je i:
$Ax=A_1x$, tj. $(A-A_1)x=0$, odnosno
$x=0$, pa je i
$By+C_2+D=0$.

e) $B_1y+C_1z+D_1=0$, $B_2y+C_2z+D_2=0$ — Pošto su date ravni paralelne sa OX osom, to je i linija njihovog presjeka paralelna sa osom OX, ukoliko date ravni nisu uzajamno paralelne.

775.

Ispitati za koju vrijednost slobodnog člana D prava:

$$2x-y-z-6=0$$

$$3x+y+2z+D=0$$

siječe osu OZ i odrediti tačku presjeka.

Rješenje. Jednačine ose OZ glase: $x=0$ i $y=0$. Da bismo našli presječnu tačku i slobodni član D, treba riješiti jednačine ose OZ sa jednačinom date prave, tj.:

$$2x-y-z-6=0 \qquad x=0$$
$$\text{i}$$
$$3x+y+2z+D=0 \qquad y=0,$$

pa se dobije:

$$z+6=0$$
$$2z+D=0$$

odakle slijedi da je $z=-6$ i $D=12$. Prema tome, presječna tačka date prave sa osom OZ ima koordinate $(0,\ 0,\ -6)$.

776.

Naći prodore prave:
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$
u koordinatnim ravnima.

Rješenje. Ako tražimo prodor date prave kroz ravan XOY, stavićemo da je $z=0$, pri čemu ćemo dobiti sistem jednačina:

$$A_1x+B_1y+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+D_2=0.$$

Rješavanjem ovog sistema dobićemo apscisu i ordinatu prodorne tačke.

Za prodornu tačku u ravni XOZ treba staviti da je $y=0$, a za prodornu tačku u ravni YOZ treba staviti $x=0$. Dalji postupak rada je isti kao i kod prodora kroz ravan XOY.

777.

Date prave napisati u kanoničnom obliku:

a) $2x-y-z-4=0$ $\qquad$ b) $x=2z-1$

$\quad\ 2x-3y-2z+7=0,$ $\qquad$ $y=3-2z.$

Rješenje. a) Stavimo li da je $z=0$, dobiće se:

$$2x-y=4$$
$$2x-3y=-7,$$

odakle dobijamo da je $y=\frac{11}{2}$, $x=\frac{19}{4}$.

Prema tome, traženi kanonski oblik jednačina date prave glasi:

$$\frac{x-\frac{19}{4}}{p}=\frac{y-\frac{11}{2}}{q}=\frac{z-0}{s},$$

gdje treba odrediti još p, q i s. Veličine p, q i s, koje su proporcionalne kosinusima uglova koje prava zaklapa sa koordinatnim osama, dobićemo kao koordinate vektora smjera prave $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, gdje su $\vec{n}_1=\{2,\ -1,\ -1\}$ i $\vec{n}_2=\{2,\ -3,\ -2\}$ normalni vektori datih ravni koje definišu pravu, tj.:

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -3 & -2\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k},$$

odakle slijedi da je: $p=-1$, $q=2$ i $s=-4$, pa jednačine tražene prave glase:

$$\frac{x-\frac{19}{4}}{-1}=\frac{y-\frac{11}{2}}{2}=\frac{z}{-4}.$$

b) Iz datog sistema jednačina dobijamo

$$z=\frac{x+1}{2} \quad \text{i} \quad z=\frac{3-y}{2},$$

pa će njen kanonski oblik da glasi:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}.$$

Kao što vidimo, dati oblik jednačine prave bilo je lako svesti na kanonski jer u svakoj od jednačina sistema je nedostajala po jedna promjenljiva.

778.

Napisati jednačine prave: $x-2y+3z-4=0$

$3x+2y-5z-4=0$ u parametarskom obliku.

Rješenje. Saberemo li date dvije jednačine dobiće se:

$$4x-2z-8=0/:2$$

tj.

$$z=2x-4. \qquad (1)$$

Međutim, ako prvu jednačinu pomnožimo sa (-3), pa je saberemo sa drugom dobiće se:

$$8y-14z+8=0/:14$$

tj.

$$z=\frac{4}{7}y+\frac{4}{7}. \qquad (2)$$

Iz jednačina (1) i (2) slijedi da je:

$$2x-4=\frac{4}{7}y+\frac{4}{7}=z,$$

odnosno:

$$\frac{x-2}{\frac{1}{2}}=\frac{y+1}{\frac{7}{4}}=z=\lambda$$

tj. u parametarskom obliku:

$$x=2+\frac{1}{2}\lambda$$

$$y=-1+\frac{7}{4}\lambda$$

$$z=\lambda.$$

779.

Prava L prodire ravni XOY i YOZ u tačkama $A(x_0, y_0, 0)$ i $B(0, y_1, z_1)$. U kojoj tački ona prodire ravan ZOX?

Rješenje. Pošto tražena prava prolazi tačkama A i B, to njene jednačine glase: odnosno u parametarskom obliku:

$$\frac{x-x_0}{0-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-0}{z_1-0},$$

odnosno u parametarskom obliku:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\lambda x_0+x_0\\ y&=\lambda(y_1-y_0)+y_0\\ z&=\lambda z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Zamjenom koordinata $(x', 0, z')$ prodora C prave u ravni XOZ u (1) mjesto x, y, z dobijamo jednačine:

$$x'=-\lambda x_0+x_0$$

$$0=\lambda(y_1-y_0)+y_0$$

$$z'=\lambda z_1,$$

iz druge slijedi da je $\lambda=-\dfrac{y_0}{y_1-y_0}$,

a smjenom ove vrijednosti za λ u prvoj i trećoj dobijamo:

$$x'=\frac{x_0 y_0}{y_1-y_0}+x_0=\frac{x_0 y_1}{y_1-y_0}$$

$$y'=0$$

$$z'=-\frac{y_0 z_1}{y_1-y_0}=\frac{y_0 z_1}{y_0-y_1}.$$

780.

Odrediti kosinuse uglova što ih prava:

$$2x-y-z-4=0$$

$$x-2y+3z+3=0$$

zaklapa sa koordinatnim osama.

Rješenje. Pošto je vektor smjera date prave:

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-5\vec{i}-7\vec{j}-3\vec{k}$$

to je $p=-5$, $q=-7$, $s=-3$ i $|\vec{a}|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{83}$,

to traženi kosinusi uglova što ih data prava zaklapa sa koordinatnim osama glase:

$$\cos\alpha=\frac{p}{|\vec{a}|}=\frac{-5}{\sqrt{83}},\quad \cos\beta=\frac{q}{|\vec{a}|}=\frac{-7}{\sqrt{83}},\quad \cos\gamma=\frac{s}{|\vec{a}|}=\frac{-3}{\sqrt{83}}.$$

781.

Odrediti ugao kojeg obrazuju prava

$$2x-2y-z-8=0$$

$$x+2y-2z-4=0$$

i prava

$$4x+y+3z-4=0$$

$$2x+2y-3z-11=0.$$

Rješenje. Vektori smjera datih pravi glase:

$$\vec{a}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=6\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k},$$

$$\vec{a}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=-9\vec{i}+18\vec{j}+6\vec{k}.$$

Odatle odmah čitamo:

$$p_1=6,\quad q_1=3,\quad s_1=6,$$

$$p_2=-9,\quad q_2=18 \text{ i } s_2=6.$$

Prema tome imamo da je:

$$\cos\varphi = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + s_1 s_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+s_1^2}\ \sqrt{p_2^2+q_2^2+s_2^2}} = \frac{4}{21}.$$

782.

Prava L data jednačinama:

$$x - 4y + 2z - 5 = 0$$
$$3x + y - z + 2 = 0$$

projicirana je ortogonalno na ravan S datu jednačinom:

$$2x + 3y + z - 6 = 0.$$

Napisati jednačinu projekcije L' prave L i naći kosinus ugla između prave L i projekcije L'.

Rješenje. Obrazujmo pramen ravni koji prolazi pravom L:

$$x - 4y + 2z - 5 + \lambda(3x + y - z + 2) = 0$$

odnosno:

$$(1 + 3\lambda)x + (\lambda - 4)y + (2 - \lambda)z + (-5 + 2\lambda) = 0.$$

Iz dobijenog pramena izdvojimo onu ravan koja je normalna na ravan S jer ona u presjeku sa ravni S određuje traženu projekciju L'.

Vrijednost za λ, kojom je određena ravan normalna na S, dobićemo iz uslova njihove normalnosti:

$$2(1 + 3\lambda) + 3(\lambda - 4) + 1\cdot(2 - \lambda) = 0$$
$$\lambda = 1.$$

Prema tome, jednačina ravni koja je normalna na ravan S glasi:

$$(S'): 4x - 3y + z - 3 = 0.$$

Tražena projekcija L' prave L određena je presjekom ravni S i ravni S', pa su njene jednačine, u stvari, jednačine tih ravni:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ 4x - 3y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

783.

Pokazati da su date prave paralelne:

$$(L_1)\ \begin{matrix} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z = 8 \end{matrix} \quad \text{i} \quad (L_2)\ \begin{matrix} x = 3\lambda - 2 \\ y = -2\lambda + 1 \\ z = \lambda. \end{matrix}$$

Rješenje. Pošto je uslov paralelnosti dvije prave dat relacijom:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{s_1}{s_2}, \qquad (1)$$

to date prave prethodno treba napisati u kanonskom obliku. Iz L_1, prvo sabiranjem, a potom oduzimanjem datih jednačina dobijamo:

$$z = \frac{x-4}{3} \quad \text{i} \quad z = -\frac{y+4}{2}.$$

Prema tome, kanonski oblik jednačina prave L_1 glasi:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z}{1}. \qquad (2)$$

Iz L_2 eliminacijom parametra λ dobija se:

$$x = 3z - 2$$
$$y = -2z + 1,$$

odnosno: $z = \frac{x+2}{3}$ i $z = \frac{y-1}{-2}$, pa kanonski oblik jednačina prave L_2 glasi:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}. \qquad (3)$$

Iz dobijenih kanonskih oblika (2) i (3) jednačina pravih L_1 i L_2 vidi se da je uslov (1) ispunjen.

784.

Pokazati normalnost pravih:

$$(L_1)\ \begin{matrix} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 2 \quad = 0 \end{matrix} \quad \text{i} \quad (L_2)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-6}.$$

Rješenje. Uslov normalnosti dvije prave dat je relacijom:

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + s_1 s_2 = 0. \qquad (1)$$

Iz datih jednačina dobijamo da je:

$$\vec{a}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}, \quad \text{tj.}$$

odnosno:

$$p_1 = -12, \quad q_1 = -8 \quad \text{i} \quad s_1 = -8,$$

$$\vec{a}_2 = \{2, 3, -6\}, \quad \text{tj.} \quad p_2 = 2, \quad q_2 = 3 \quad \text{i} \quad s_2 = -6.$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u relaciju (1) vidjećemo da je ona ispunjena, pa prema tome prave su normalne.

785.

Prava sa dvjema koordinatnim osama zaklapa ugao $\frac{\pi}{3}$; koliki ugao zaklapa sa trećom koordinatnom osom?

Rješenje. Traženi ugao dobiće se iz relacije:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

tj.

$$\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\gamma=1,$$

odavde slijedi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1$$

$$\cos^2\gamma=\frac{1}{2}$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

tj.

$$\gamma=\frac{\pi}{4}\ \text{ili}\ \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

786.

Odrediti presječnu tačku pravih:

$$(L_1): \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-4}\quad \text{i}\quad (L_2)\ \frac{x-9}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}.$$

Rješenje. Kako je tačka $A_1(1, -2, 2)$ na prvoj L_1, i tačka $A_2(9, 2, -1)$ na pravoj (L_2), a koeficijenti smjera tih pravih:

$$p_1=2,\ q_1=1,\ s_1=-4,\ \text{odnosno:}\ p_2=6,\ q_2=3\ \text{i}\ s_2=1,$$

onda je uslov da se te dvije prave sijeku:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & s_1\\ p_2 & q_2 & s_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 4 & -3\\ 2 & 1 & -4\\ 6 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

ispunjen.

Pošto smo ustanovili da se date prave sijeku, nađimo koordinate presječne tačke. U tu svrhu napisaćemo date prave u parametarskom obliku:

$$(L_1)\ \begin{aligned} x&=1+2\lambda_1\ldots (1)\\ y&=-2+\lambda_1\ldots (2)\\ z&=2-4\lambda_1\ldots (3)\end{aligned}\qquad (L_2)\ \begin{aligned} x&=9+6\lambda_2\ldots (4)\\ y&=2+3\lambda_2\ldots (5)\\ z&=-1+\lambda_2\ldots (6)\end{aligned}$$

Iz (1) i (4) dobijamo da je: $2\lambda_1-6\lambda_2=8\ \ldots (7)$

Iz (2) i (5) dobijamo da je: $\lambda_1-3\lambda_2=4\ \ldots (8)$

Iz (3) i (6) dobijamo da je: $-4\lambda_1-\lambda_2=-3\ \ldots (9)$.

Rješavanjem jednačina (7) i (8) dobijamo da je $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=-1$ koji zadovoljavaju i jednačinu (9).

Ako dobijene vrijednosti za λ_1 i λ_2 uvrstimo u relacije (1), (2) i (3) ili u (4), (5) i (6), dobijamo da je $x=3$, $y=-1$ i $z=-2$. Dakle, tražena tačka presjeka datih pravih je $(3, -1, -2)$.

787.

Odrediti presječnu tačku pravih:

$$5x-2y+5z+3=0 \qquad 3x+10y-z-47=0$$

$$(L_1):\ x+3y-4z-10=0\ \text{i}\ (L_2):\ 6x-2y+7z+3=0.$$

Rješenje. S obzirom da su prave zadane kao presjeci ravni, koordinate presječne tačke pravih moraju zadovoljavati jednačine zadatih ravni. To znači, da treba riješiti sistem od četiri linearne jednačine sa tri nepoznate. Da bi ovaj sistem imao rješenje, treba da je eliminanta sistema jednaka nuli. Zaista, uslov je ispunjen jer je:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 & 3\\ 1 & 3 & -4 & -10\\ 3 & 10 & -1 & -47\\ 6 & -2 & 7 & 3\end{vmatrix}=0.$$

Rješavanjem bilo koje tri jednačine ravnina, dolazimo do rješenja $x=2$, $y=4$ i $z=-1$ koja zadovoljavaju i četvrtu jednačinu. Dakle, date prave se sijeku u tački $(2, 4, -1)$.

788.

Odrediti udaljenost d tačke $P(1, 2, 2)$ od prave L koja prolazi tačkama: $A(2, 2, 3)$ i $B(2, -1, 0)$.

Rješenje.

$$\overrightarrow{BA}\equiv\vec{a}=3\vec{j}+3\vec{k}$$

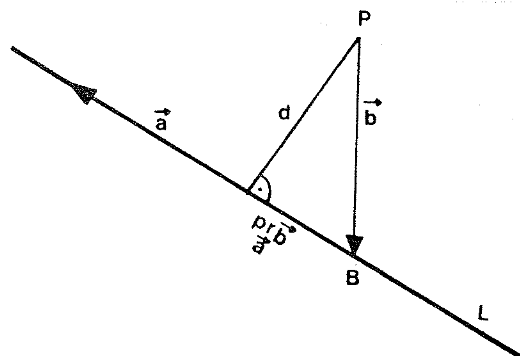
$$\overrightarrow{PB}\equiv\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=-\frac{15}{\sqrt{18}}$$

Sa slike se vidi da je

$$d^2 = |\vec{b}|^2 - \left(\text{pr}_{\vec{a}}\,\vec{b}\right)^2 = (1+9+4) - \frac{225}{18} = \frac{3}{2}.$$

$$d = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Sl. 27.

789.-

Sastaviti jednačinu normale povučene iz tačke (2, 3, 1) na pravu:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}. \qquad (1)$$

Rješenje. Da bismo problem riješili, potrebno je kroz datu tačku povući ravan normalnu na datu pravu. Jednačina ravni kroz datu tačku (2, 3, 1) glasi:

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z-1) = 0. \qquad (2)$$

Ako je dobijena ravan normalna na datu pravu, onda je njen normalni vektor $\vec{n} = \{A, B, C\}$ kolinearan sa vektorom smjera $\vec{a} = \{2, -1, 3\}$ datog pravca, pa su im koordinate proporcionalne, tj.: $A = 2\lambda$, $B = -\lambda$ i $C = 3\lambda$.

Prema tome, jednačina ravni (2) glasi:

$$2\lambda(x-2) - \lambda(y-3) + 3\lambda(z-1) / : \lambda$$

$$2x - y + 3z - 4 = 0. \qquad (3)$$

Sljedeći korak je da nađemo projekciju date tačke na pravu (1). U tu svrhu treba riješiti sistem jednačina koji čini jednačina ravni (2) i jednačine prave (1) tj.:

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3},$$

odnosno sistem jednačina:

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$

$$\frac{x+1}{2} = -y$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

tj.

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$

$$x + 2y + 1 = 0$$

$$3x - 2z + 7 = 0.$$

Rješenje ovog sistema je $x = \frac{D_x}{D} = -1$, $y = \frac{D_y}{D} = 0$ i $z = \frac{D_z}{D} = 2$.

Prema tome, projekcija tačke (2, 3, 1) na pravu (1) je (−1, 0, 2).

Tražena normala spuštena iz tačke (2, 3, 1) na pravu (1) biće prava koja prolazi kroz datu tačku (2, 3, 1) i njenu projekciju (−1, 0, 2) na pravoj (1), tj.:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

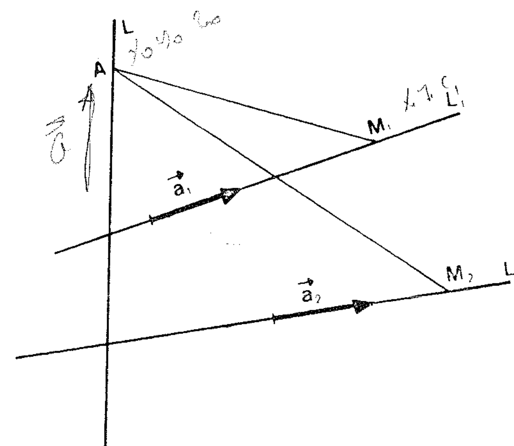
tj.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = 1 - z.$$

790.

Sastaviti jednačine prave koja prolazi tačkom $A(4, 0, -1)$ i siječe prave:

$$(L_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3} \quad \text{i} \quad (L_2): \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$



Sl 28.

Rješenje. $\vec{a}_1=\{2, 4, 3\}$ vektor smjera prave L_1

$M_1(1, -3, 5)$ tačka na pravoj L_1

$\vec{a}_2=\{5, -1, 2\}$ vektor smjera prave L_2

$M_2(0, 2, -1)$ tačka na pravoj L_2

$\vec{a}=\{p, q, s\}$ vektor smjera tražene prave L

$A(4, 0, -1)$ tačka kroz koju prolazi prava L.

Da bi tražena prava L, koja prolazi tačkom $A(4, 0, -1)$ tj.:

$$\frac{x-4}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z+1}{s}, \tag{1}$$

sjekla date prave L_1 i L_2, čiji su vektori smjera $\vec{a}_1=\{p_1, q_1, s_1\}$ i $\vec{a}_2=\{p_2, q_2, s_2\}$, treba da su ispunjeni uslovi:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ p & q & s \\ p_1 & q_1 & s_1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ p & q & s \\ p_2 & q_2 & s_2 \end{vmatrix}=0$$

tj.

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & 6 \\ p & q & s \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=33p-21q+6s=0$$

i

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ p & q & s \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-4p-8q+6s=0.$$

Rješavanjem dobijenog sistema od dvije jednačine sa tri nepoznate dobićemo da je:

$$q=\frac{37}{13}p \quad \text{i} \quad s=\frac{58}{13}p$$

pa je:

$$p:q:s=p:\frac{37}{13}p:\frac{58}{13}p / \cdot\frac{13}{p}$$

$$p:q:s=13:37:58.$$

Prema tome, tražena jednačina prave (1) glasi:

$$\frac{x-4}{13}=\frac{y}{37}=\frac{z+1}{58}.$$

791.

Ispitaj položaj prave L prema ravni S.

a) $(L):\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $(S): 2x+3y+3z-8=0$,

b) $(L):\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-2}$, (S) $8x-3y+6z-12=0$,

c) $(L):\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-3}{5}$, $(S): 4x+3y-z+3=0$.

Rješenje. Pri ispitivanju uzajamnog odnosa prave i ravni treba se pridržavati sljedećeg reda:

1) ispitati da li je prava paralelna sa ravni, tj. da li je $Ap+Bq+Cs=0$,

2) ako je pored uslova $Ap+Bq+Cs=0$ ispunjen i uslov $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ gdje su x_1, y_1 i z_1 koordinate date tačke prave L, onda prava leži u ravni,

3) ako nije ispunjen ni uslov 1) ni uslov 2), onda prava prodire ravan.

a) $Ap+Bq+Cs=2\cdot 3+3\cdot(-1)+3\cdot 2=9$, tj. prava prodire ravan. Da bismo našli tačku prodora, treba riješiti sistem jednačina:

$$\left.\begin{aligned} x+3y&=4 \\ 2x-3z&=-1 \end{aligned}\right\} \text{ jednačina date prave}$$

$$2x+3y+3z=8\} \text{ jednačina date ravni}$$

tj.

$$x=\frac{D_x}{D}=1, \; y=\frac{D_y}{D}=1, \quad z=\frac{D_z}{D}=1.$$

Prema tome, tačka $M(1, 1, 1)$ je tačka prodora.

b) $Ap+Bq+Cs=8\cdot 3-3\cdot 4+6\cdot(-2)=0$. Prava je paralelna datoj ravni jer je $Ax_1+By_1+Cz_1+D=8\cdot(-2)-3(-1)+6\cdot 0-12=-25\neq 0$.

c) $Ap+Bq+Cs=4\cdot 2+3\cdot(-1)-1\cdot 5=0$, i $Ax_1+By_1+Cz_1+D=$ $=4\cdot 3+3\cdot(-4)-1\cdot 3+3=0$, pa prava leži u ravni.

8.22. Zadaci za samostalan rad

792.

Na osi OX naći tačku B čije je rastojanje od tačke $A(-3, 3, -4)$ jednako $5\sqrt{2}$. Izračunati kosinuse uglova između vektora $\overrightarrow{AB}$ i koordinatnih osa.

$\Big($Rezultat: $B_1(-8, 0, 0)$ i $B_2(2, 0, 0)$; $\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{i})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \vec{i})=135°$, $\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{j})=-\frac{3\sqrt{2}}{10}$, $\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{k})=\frac{2\sqrt{2}}{5}\Big)$.

793.

Nacrtati u Dekartovom koordinatnom sistemu ravni:

1) $x-2y+4z-12=0,$
2) $3x-5z+4=0,$
3) $2x-2y+3z=0,$
4) $x+2y-7=0,$
5) $3x+5y=0,$
6) $2y-3z=0,$
7) $x+z-3=0,$
8) $y+4=0.$

794.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke:

$$A(2, 3, 1), \quad B(3, 1, 4) \text{ i } C(2, 1, 5).$$

(Rješenje: $x+2y+z-9=0$).

795.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatni početak i kroz tačke $M_1(2, 1, 1)$ i $M_2(-3, 0, 4)$.

(Rješenje: $4x-11y+3z=0$).

796.

Sastaviti jednačine ravni koje prolaze kroz tačku $(2, 6, -3)$ i paralelne koordinatnim ravnima.

(Rješenje: $x=2$, $y=6$, $z=-3$).

797.

Napisati jednačinu ravni koja odsijeca na koordinatnim osama OX i OY odsječke 5 i -7 i prolazi kroz tačku $(1, 1, 2)$.

(Rješenje: $14x-10y+33z-70=0$).

798.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $(3, 5, -7)$ i odsijeca na koordinatnim osama jednake odsječke.

(Rješenje: $x+y+z-1=0$).

799.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi tačkama $A(3, 5, 1)$ i $B(7, 7, 8)$ i na koordinatnim osama OX i OY odsijeca jednake odsječke.

(Rješenje: $7x+7y-6z-50=0$).

800.

Kolike odsječke odsijeca na koordinatnim osama ravan:

$$x-y+7z-4=0?$$

$\left(\text{Rješenje: } m=4,\ n=-4,\ p=\frac{4}{7}\right).$

801.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi tačkom $A(3, 7, 2)$ i paralelna je vektorima $\vec{a}=\{4, 1, 2\}$ i $\vec{b}=\{5, 3, 1\}$.

(Rješenje: $5x-6y-7z+41=0$).

802.

Napisati jednačine ravni koje prolaze kroz koordinatne ose i paralelne su sa vektorom $\vec{a}=\{2, 1, -4\}$.

(Rješenje: $x-2y=0$, $2x+z=0$, $4y+z=0$).

803.

Napisati jednačine ravni koje prolaze kroz koordinatne ose i kroz tačku $(3, -5, 1)$.

(Rješenje: $5x+3y=0$, $x-3z=0$, $y+5z=0$).

804.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatnu osu OY i podjednako je udaljena od tačaka: $(2, 7, 3)$ i $(-1, 1, 0)$.

(Rješenje: $3x-z=0$, $x-z=0$).

805.

Dati su vrhovi tetraedra: $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$ i $D(0, -7, 8)$. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz ivicu AB i sredinu ivice CD.

(Rješenje: $27x+11y+z-65=0$)

806.

Sastaviti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke: $A(4, 5, 2)$ i $B(6, 2, 4)$ i paralelna je vektoru $\vec{a}=\{1, 2, 1\}$.

(Rješenje: $x-z-2=0$).

807.

Napisati parametarske jednačine ravni koja prolazi tačkom (2, 3, −5) i paralelna je vektorima: $\vec{a}=\{-5, 6, 4\}$ i $\vec{b}=\{4, -2, 0\}$.

(Rješenje: $x=2-5u+4v$, $y=3+6u-2v$, $z=-5+4u$).

808.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku (3, −5, 1) i paralelna je ravni: $x-2y+4z=0$.

(Rješenje: $x-2y+4z-17=0$).

809.

Odrediti položaj tačke: $A(-3, 3, 5)$ u odnosu na ravan: $2x-3y+4z-5=0$.

(Rješenje: Tačka leži u ravni).

810.

Naći ugao koji grade ravni: $x+3y-4z+5$ i $2x+2y+2z-7=0$.

(Rješenje: Ravni su uzajamno normalne).

811.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatni početak, normalna je na ravan: $5x-2y+5z-10=0$ i obrazuje sa ravni $x-4y-8z+12=0$ ugao od 45°.

(Rješenje: $x+20y+7z=0$ i $x-z=0$).

812.

Odrediti podnožje normale spuštene iz tačke (1, 3, 5) na pravu po kojoj se sijeku ravni: $2x+y+z-1=0$ i $3x+y+2z-3=0$.

(Rješenje: (−2, 1, 4)).

813.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatni početak i tačku (1, 2, 3), a normalna je na ravan: $x-y+2z-4=0$.

(Rješenje: $7x+y-3z=0$).

814.

Odrediti uzajamni položaj tri ravni:

1) $2x-4y-5z-21=0$, $x-3z+18=0$, $6x+y+z-30=0$

2) $3x-y+2z+1=0$, $7x+2y+z=0$, $15x+8y-z-2=0$.

(Rješenje: 1) Ravni se sijeku u jednoj tački; 2) Ravni prolaze kroz jednu pravu).

815.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatni početak i kroz pravu presjeka ravni: $2x+5y-6z+4=0$ i $3y+2z+6=0$.

(Rješenje: $6x+9y-22z=0$).

816.

Kroz liniju presjeka ravni: $6x-y+z=0$ i $5x+z-10=0$ postaviti ravan paralelnu OX osi.

(Rješenje: $5y+13z-60=0$).

817.

Data je ravan $\vec{r}\cdot\vec{n}=1$, $\vec{n}=\{1, 2, -3\}$. Da li se tačka $P(-2, -7, 1)$ nalazi sa iste strane ravni gdje i koordinatni početak pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema? Izračunati odstojanje te tačke od ravni.

818.

Naći vektor položaja tačke presjeka ravni: $\vec{r}\cdot\vec{n}_i=b_i$, $(i=1, 2, 3)$, gdje je: $b_1=-3$, $b_2=5$, $b_3=-7$ i $\vec{n}_1=\{1, -4, -2\}$, $\vec{n}_2=\{3, 1, 1\}$, $\vec{n}_3=\{3, -12, -6\}$.

819.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz liniju presjeka dvije ravni: $2x-z=0$, $x+y-z+5=0$ i normalnu a ravan: $7x-y+4z-3=0$.

(Rješenje: $3x+5y-4z+25=0$).

820.

Napisati jednačinu ravni koja je normalna na ravan: $x+3y+5z-10=0$ i prolazi kroz liniju presjeka date ravni sa ravni XOY.

(Rješenje: $x+3y-2z-10=0$).

821.

Kroz liniju presjeka ravni: $x+5y+z=0$ i $x-z+4=0$ postaviti ravan koja sa ravni: $x-4y-8z+12=0$ zaklapa ugao od 45°.

(Rješenje: $x+20y+7z-12=0$, $x-z+4=0$).

822.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku presjeka tri ravni $x-y=0$, $x+y-2z+1=0$, $2x+z-4=0$ i:

a) prolazi kroz OY osu, b) paralelna ravni XOZ, c) prolazi kroz koordinatni početak i tačku (2, 1, 7).

(Rješenje: a) $10x-7z=0$, b) $6y-7=0$, c) $39x-29y-7z=0$).

823.

Sastaviti jednačinu ravni koja je udaljena od koordinatnog početka $\sqrt{29}$ i normalna je na prvu presjeka ravni: $2x-y+z=0$, $6x-y+7z-4=0$.

(Rješenje: $3x+4y-2z\pm 29=0$.)

824.

Na osi OZ naći tačku podjednako udaljenu od tačke: (2, 3, 4) i ravni $2x+3y+z-17=0$.

(Rješenje: (0, 0, 3)).

825.

Na osi OY naći tačku jednako udaljenu od dvije ravni:

$$x+y-z+1=0,\quad x-y+z-5=0.$$

(Rješenje: (0, −3, 0)).

826.

Sastaviti ravan koja je paralelna ravni: $2x+y-4z+5=0$ i udaljena od tačke (1, 2, 0) za $\sqrt{21}$.

(Rješenje: a) $2x+y-4z+17=0$, b) $2x+y-4z-25=0$).

827.

Na liniji presjeka dvije ravni: $2x-y+z-8=0$ i $4x+3y-z+14$ odrediti tačku udaljenu 7 jedinica od ravni $2x+3y-6z-10=0$.

(Rješenje: (0, −3, 5) i $\left(\frac{98}{23}, -\frac{363}{23}, -\frac{375}{23}\right)$.

828.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi tačkom: $A(5, 2, 0)$ i udaljena je od tačke $B(6, 1, -1)$ za 1 jedinicu, a od tačke $C(0, 5, 4)$ za 3 jedinice.

(Rješenje: $x+2y+2z-9=0$, $y-2=0$).

829.

Sastaviti jednačinu prave M_1M_2 koja prolazi kroz tačke:

a) $M_1(2, 3, 1)$ i $M_2(4, 6, 9)$, b) $M_1(7, -1, 2)$ i $M_2(5, -1, 4)$.

(Rješenje: a) $x=2+2\lambda$, $y=3+3\lambda$, $z=1+8\lambda$;

b) $x=7-\lambda$, $y=-1$, $z=2+\lambda$).

830.

Jednačinu prave $-2x+3y-8z-1=0$, $x-11y+5z-4=0$ napisati u vektorskom, kanonskom i parametarskom obliku.

831.

Napisati jednačine prave koja:

a) prolazi kroz tačku: (3, 5, 1) paralelno pravoj $x=2+4\lambda$, $y=-3\lambda$, $z=-3$.

b) prolazi kroz tačku: (0, −5, 4) paralelna pravoj $x+2y+6=0$, $z=5$.

(Rješenje: a) $x=3+4\lambda$, $y=5-3\lambda$, $z=1$,

b) $x+2y+10=0$, $z-4=0$).

832.

Naći projekciju pravih na XOY ravan:

a) $5x+8y-3z+9=0$; b) $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-6}{8}$.

$2x-4y+z-1=0$,

(Rješenje: a) $11x-4y+6=0$, $z=0$; b) $6x+5y-38=0$, $z=0$).

833.

Napisati jednačine prave koja prolazi kroz tačku (2, 3, 1) i siječe prave:

(L_1): $x+y=0$, $x-y+z+4=0$ i (L_2): $x+3y-1=0$, $x+y-2=0$.

(Rješenje: $x-9y+5z+20=0$, $x-2y-5z+9=0$).

834.

Ispitati da li se slijedeće prave sijeku:

a) $\vec{r}\times(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=\vec{i}-\vec{k}$

$\vec{r}\times(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$,

b) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{6}, \quad \frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$,

c) (L_1): $x=1+2\lambda, \quad y=7+\lambda, \quad z=5+4\lambda$

(L_2): $x=6+3\lambda, \quad y=-1-2\lambda, \quad z=\lambda$,

d) (L_1): $x-2y+3=0$ $\quad$ (L_2): $3x+2y+z-4=0$

$8y+z-13=0, \quad\quad 3x+y-z+4=0.$

835.

Odrediti kosinuse pravca prave: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12}$.

$\left(\text{Rješenje: } \cos\alpha=\frac{4}{13}, \ \cos\beta=-\frac{3}{13}, \ \cos\gamma=\frac{12}{13}\right)$.

836.

Napisati jednačine prave koja prolazi tačkom $A(1, -5, 3)$ i sa koordinatnim osama zaklapa uglove od 60°, 45° i 120°

$\left(\text{Rješenje: } x-1=\frac{y+5}{2}=-(z-3)\right)$.

837.

Odrediti ugao između pravih:

$$3x-4y-2z=0 \qquad 4x+y-6z-2=0$$
$$2x+y-2z=0 \quad \text{i} \quad y-3z+2=0.$$

$\left(\text{Rješenje: } \cos\varphi=\pm\frac{98}{195}\right)$.

838.

Odrediti ugao između prave: $x+y-z=0$, $2x-3y+z=0$ i ravni $3x+5y-4z+2=0$.

$\left(\text{Rješenje: } \arcsin\varphi=\frac{1}{10\sqrt{19}}\right)$.

839.

Odrediti ugao između prave: $\vec{r}\times(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=\vec{k}+2\vec{j}$ i ravni

$$\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}+3\vec{k}\right)=5.$$

840.

Napisati jednačine projekcije prave: $x=3+5\lambda$, $y=-1+\lambda$, $z=4+\lambda$ na ravan $2x-2y+3z-5=0$.

(Rješenje: $5x-13y-12z+20=0$, $2x-2y+3z-5=0$).

841.

Napisati jednačine prave koja prolazi kroz tačku: $(3, -2, 4)$ i normalna je na ravan $5x+3y-7z+1=0$.

$\left(\text{Rješenje: } \frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}\right)$.

842.

Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatni početak i normalna je na pravoj: $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.

(Rješenje: $4x+5y-2z=0$).

843.

Odrediti rastojanje od tačke: $(1, 3, 5)$ do prave $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$.

(Rješenje: $d=14$).

844.

Naći odstojanje tačke: $(1, 2, 5)$ od prave: $x=\lambda$, $y=1-2\lambda$, $z=3+\lambda$.

$\left(\text{Rješenje: } d=\sqrt{\frac{35}{6}}\right)$.

845.

Naći rastojanje između pravih:

$$x+y-z+1=0 \qquad x-2y+3z-6=0$$
$$x+y=0 \quad \text{i} \quad 2x-y+3z-6=0.$$

(Rješenje: $d=0$ i prave se sijeku).

846.

Odrediti vektor položaja ortogonalne projekcije tačke: $M_1(1, 2, -5)$ na pravu $\frac{x-2}{3}=y-3=\frac{z+1}{4}$.

847.

Odrediti tačku prodora prave: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-z}{3}=\frac{z}{4}$ kroz ravan $3x-y+2z-6=0$.

LITERATURA

1. *Anđelić T.*, Matrice, Beograd 1970.
2. *Blanuša D.*, Viša matematika I, Zagreb 1965.
3. *Baur A.*, Analytiche geometrie, München-Düsseldorf 1955.
4. *Бахвалов С. В.*, Аналитическая геометрия. Москва 1970.
5. *Цубербилер О. Н.*, Задачи и упражнения по аналитической геометрии, Москва 1959.
6. *Devidé V.*, Riješeni zadaci iz više matematike. Zagreb 1970.
7. *Фаддеев Д. К.*, Зборник задач по высшей алгебре. Москва 1968.
8. *Игнатьева А. В.*, Курс высшей математики. Москва 1964.
9. *Кручкович Г. И.*, Зборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. Москва 1970.
10. *Курош А. Г.*, Курс высшей алгебры. Москва 1962.
11. *Mitrinović D.*, Matrice i determinante (Zbornik zadataka i problema). Beograd 1971.
12. *Mitrinović D.*, Linearna algebra, polinomi i analitička geometrija. Beograd 1973.
13. *Rašković D.*, Osnovi matričnog računa. Beograd 1971.
14. *Petrović D.*, Matematika I. Mostar 1968.
15. *Рублев А. Н.*, Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва 1968.
16. *Uščumlić M.*, *Miličić P.*, Zbirka zadataka iz više matematike I. Beograd 1973.
17. *Schwartz A.*, Analytic geometry and calculus. New York 1960.